

FÍSICA

Conceitos e Aplicações

Paulo Cesar M. Penteado

Noções de Hidrodinâmica para o Ensino médio

**Conceitos básicos
Equação da continuidade
Teorema de Bernoulli
Aplicações do teorema de Bernoulli**

Noções de hidrodinâmica para o ensino médio

Conceitos básicos

No ensino de nível médio, geralmente é estudado apenas o equilíbrio estático dos fluidos, a **hidrostática** (ver capítulo 17, volume 1). Na hidrostática são discutidos, principalmente, os conceitos de pressão em um ponto no interior de um líquido em equilíbrio e o empuxo exercido em um corpo imerso em um fluido em repouso.

Iremos agora fazer um estudo mais complexo, os fluidos em movimento. Nesse ramo da Física, denominado **hidrodinâmica**, muitos aspectos dos movimentos dos fluidos ainda estão sendo objeto de estudo. Entretanto, supondo algumas simplificações, podemos ter um bom entendimento sobre o assunto.

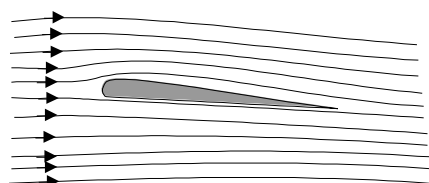
Para começar, devemos distinguir dois tipos principais de fluxo de um fluido.

Se observarmos água, na qual estão dispersas partículas coloridas, fluindo através de um tubo de vidro, podemos perceber que, de modo bastante freqüente, o fluido não se move em linhas paralelas às paredes do tubo, mas de uma maneira bastante irregular. Além do movimento ao longo do eixo do tubo, podemos notar que ocorrem movimentos na direção perpendicular ao eixo do tubo. Nesse caso, o fluxo é denominado **fluxo turbulento**.

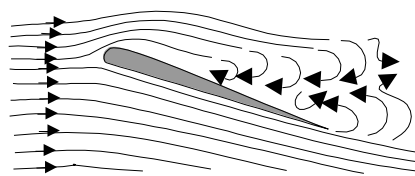
Entretanto, quando a velocidade de escoamento diminui abaixo de certo valor, que depende de uma série de fatores, as partículas do fluido passam a se movimentar em trajetórias paralelas às paredes do tubo. Nesse caso, o fluxo de fluido é suave e passa a ser denominado **fluxo laminar**.

Na hidrodinâmica, visando facilitar a visualização do fluxo de um fluido, é útil o conceito de **linha de corrente**. A linha de corrente é, por definição, a curva cuja direção em cada ponto é tangente ao vetor velocidade do fluido. Dessa maneira, a partir das linhas de corrente podemos visualizar o comportamento do fluido durante seu movimento.

As figuras abaixo mostram as linhas de corrente de um fluxo de fluido ao redor de um corpo. Observe o comportamento das linhas de corrente no fluxo laminar e compare com o fluxo turbulento.



Fluxo laminar

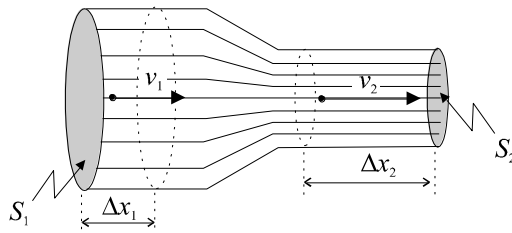


Fluxo turbulento

No estudo que iniciamos agora, vamos considerar apenas o fluxo laminar dos fluidos. Iremos considerar também, que o fluxo, além de laminar, é **estacionário** (ou **permanente**). Um fluxo de fluido é dito estacionário quando, em qualquer ponto, a velocidade, a pressão e a densidade do fluido permanecem constantes.

Equação da continuidade

Consideremos um fluido em um fluxo laminar estacionário no interior de um tubo de diâmetro variável como o mostrado na figura a seguir.



O **fluxo de massa** de fluido é definido como $\frac{\Delta m}{\Delta t}$, em que Δm é a massa de fluido que escoou através de uma secção transversal do tubo no intervalo de tempo Δt .

Calculemos, então, o fluxo de massa do fluido através da secção transversal de área S_1 .

Observe que o volume de fluido que passa através dessa secção transversal no intervalo de tempo Δt é dado por $S_1 \cdot \Delta x_1$, em que Δx_1 é a distância percorrida pelo fluido no intervalo de tempo Δt .

Então, sendo ρ_1 a densidade do fluido nessa região do tubo, temos:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho_1 \cdot \Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1 \cdot S_1 \cdot \Delta x_1}{\Delta t} = \rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1$$

De maneira análoga, na região do tubo onde a secção transversal tem área S_2 , teremos:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho_2 \cdot \Delta V_2}{\Delta t} = \frac{\rho_2 \cdot S_2 \cdot \Delta x_2}{\Delta t} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$$

Observe que a massa de fluido que passa por uma dada secção transversal do tubo em um dado intervalo de tempo é a mesma, qualquer que seja a posição do tubo em que a secção é considerada.

Portanto, como o fluxo de massa é constante ao longo do tubo, devemos ter:

$$\boxed{\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2} \quad \text{(equação da continuidade)}$$

Se o fluido é incompressível, o que é uma excelente aproximação no caso dos líquidos na maioria das situações (e algumas vezes até mesmo para os gases), então $\rho_1 = \rho_2$ e a equação da continuidade torna-se mais simples:

$$\boxed{S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2} \quad \left[\text{com } \rho \text{ constante} \right]$$

A partir dessa relação simplificada, podemos concluir que, se o diâmetro do tubo diminui, então a velocidade de escoamento do fluido no interior do tubo deve aumentar e vice-versa.

Isso faz sentido e pode ser observado no escoamento das águas de um rio. Nas regiões em que o rio é largo, a correnteza é mansa e a água flui calmamente. Entretanto, quando o rio se estreita e as margens estão mais próximas, a correnteza atinge velocidades bem maiores e a água flui de maneira turbulenta.

Observe também que o produto $S \cdot v$ corresponde à vazão em volume $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, pois:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \cdot \Delta x}{\Delta t} = S \cdot v$$

Portanto a equação da continuidade impõe que a vazão em volume através da tubulação é constante em qualquer secção transversal que se considere.

Exercícios resolvidos

1. O raio da aorta é cerca de 1,0 cm e o sangue flui através dela com velocidade de 30,0 cm/s. Calcule a velocidade média do sangue nos capilares dado que cada capilar tem um diâmetro interno de cerca de $8 \cdot 10^{-4}$ cm e que existem literalmente bilhões deles, de modo que a área de secção transversal total dos capilares é de cerca de 2.000 cm².

Solução

Seja $S_1 = \pi \cdot r^2$, em que $r = 1,0$ cm, a área da secção transversal da aorta e v_1 a velocidade do fluxo sanguíneo através dela. Para os capilares, seja S_2 a área de secção transversal total e v_2 a velocidade do fluxo sanguíneo através de cada capilar. Pela equação da continuidade devemos ter: $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$.

$$\text{Então: } \pi \cdot 1,0^2 \cdot 30,0 = 2.000 \cdot v_2 \Rightarrow \boxed{v_2 \cong 0,05 \text{ cm/s} = 0,5 \text{ mm/s}}$$

2. Qual deverá ser a área de secção transversal de uma tubulação, em que o ar se move a 3,0 m/s, de modo a permitir a renovação do ar, a cada 15 minutos, em um quarto com 300 m^3 de volume? Admita que a densidade do ar permaneça constante.

Solução

Podemos aplicar a equação da continuidade a esse problema se admitirmos que o ambiente seja parte da tubulação através da qual o ar irá fluir. Note que: $S_2 \cdot v_2 = S_2 \cdot \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t}$, em que V_2 é o volume do quarto. Então, pela equação da continuidade: $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \Rightarrow S_1 \cdot v_1 = \frac{V_2}{\Delta t}$.

Usando os valores numéricos fornecidos no enunciado, obtemos:

$$S_1 \cdot 3,0 = \frac{300}{15 \cdot 60} \Rightarrow S_1 \cong 0,11 \text{ m}^2$$

Se a tubulação tiver uma secção transversal circular, então $S = \pi \cdot r^2$, e encontramos que o raio da tubulação a ser usada deve ser de, aproximadamente, 0,19 m ou 19 cm.

Exercícios propostos

P.1 (U.F. Santa Maria-RS) Um líquido incompressível escoava através de uma mangueira cilíndrica de raio r e enche um recipiente de volume V em um intervalo de tempo Δt . A velocidade média de escoamento do líquido é:

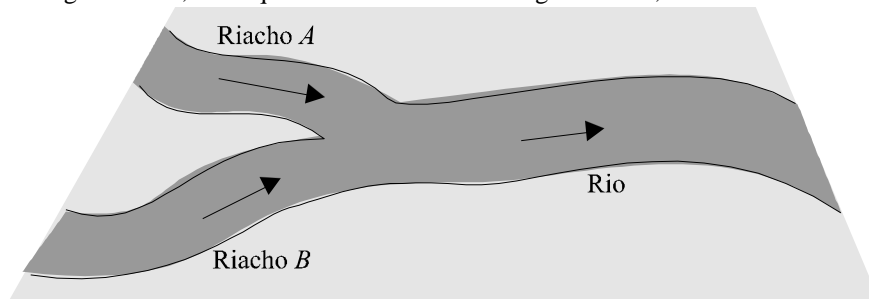
- a) $\frac{V}{r \cdot \Delta t}$
- b) $\frac{V}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta t}$
- c) $\frac{V}{\pi \cdot r^2 \cdot \Delta t}$
- d) $V \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta t$
- e) $\frac{V \cdot \pi \cdot r^2}{\Delta t}$

P.2 Uma mangueira, com diâmetro interno de 8,0 cm, é usada para encher uma piscina circular com diâmetro de 2,4 m. A água flui através da mangueira com uma velocidade média de 0,5 m/s. Por quanto tempo essa mangueira deverá ser usada até a água na piscina atingir a profundidade de 0,6 m?

P.3 (UFPA) Considere duas regiões distintas do leito de um rio: uma larga A , com $200,0 \text{ m}^2$ de área na secção transversal, onde a velocidade média da água é de 1,0 m/s; outra estreita B , com $40,0 \text{ m}^2$ de área na secção transversal. Calcule:

- a) a vazão volumétrica do rio, em m^3/s ;
- b) a velocidade média da água do rio, em m/s, na região estreita B .

P.4 A figura abaixo mostra dois riachos, A e B , que se unem para formar um rio. O riacho A tem largura de 2,0 m, profundidade de 0,50 m e a água flui com velocidade de 4,0 m/s. O riacho B tem largura de 3,0 m, profundidade de 1,0 m e, nesse riacho, a água flui a 2,0 m/s. Determine a profundidade do rio, sabendo que sua largura é de 5,0 m e que a velocidade de suas águas é de 2,5 m/s.



P.5 Um duto circular, com raio de 15 cm, é usado para renovar o ar em uma sala, com dimensões de $10\text{ m} \times 5,0\text{ m} \times 4,5\text{ m}$, a cada 10 minutos. Qual deverá ser a velocidade média do fluxo de ar através do duto para que a renovação de ar ocorra conforme desejado?

P.6 Uma mangueira de jardim tem diâmetro interno de 1,8 cm e está ligada a um irrigador que consiste apenas de um recipiente com 24 orifícios, cada um com diâmetro de 0,12 cm. Se a velocidade da água na mangueira é de 0,90 m/s, qual sua velocidade ao sair dos orifícios?

P.7 Usando os dados do exercício resolvido 1, calcule a velocidade média do fluxo de sangue através das maiores artérias do corpo humano, sabendo que tais artérias têm secção transversal com área de $2,0\text{ cm}^2$.

Teorema de Bernoulli

Você já deve ter se perguntado como um grande avião, com muitas toneladas, pode permanecer no ar apesar de todo o seu peso. Ou como funciona um aerofólio de um carro de Fórmula 1.

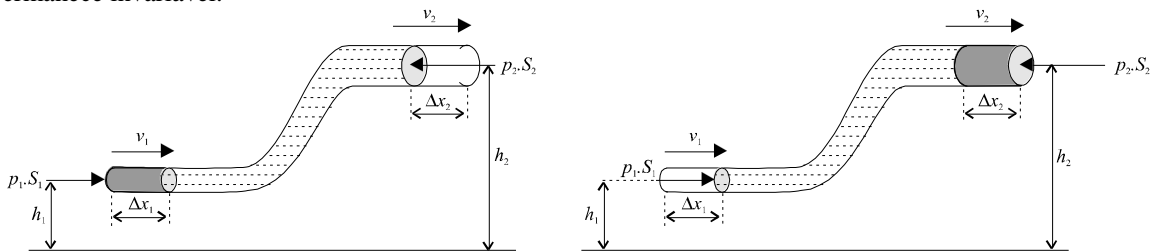
A resposta a essas perguntas está em um teorema estabelecido em 1738 por Daniel Bernoulli (1700-1782), matemático e físico suíço, e publicado em sua obra *Hydrodynamica*.

O **teorema de Bernoulli**, em essência, estabelece que a energia, em um fluxo estacionário, é constante ao longo do caminho descrito pelo fluido. Esse teorema não é, portanto, um princípio novo, mas uma relação obtida a partir das leis básicas da mecânica clássica.

O teorema de Bernoulli pode ser deduzido a partir do teorema da energia cinética (ver pág. 258 do volume 1): "O trabalho da resultante das forças agentes em um corpo entre dois instantes é igual à variação da energia cinética experimentada pelo corpo naquele intervalo de tempo".

As figuras a seguir mostram um fluido escoando no interior de uma tubulação que se eleva gradualmente desde uma altura h_1 até uma altura h_2 , medidas em relação a um plano horizontal de referência. Na região mais baixa, o tubo tem área de secção transversal S_1 , e na mais alta, área S_2 . A pressão do fluido na região inferior do tubo é p_1 e na superior, p_2 .

Consideremos, então, o deslocamento da porção sombreada de fluido desde a região mais baixa do tubo até a região mais alta. Nesse deslocamento, a porção de fluido assinalada com linhas tracejadas permanece invariável.



O trabalho realizado pela força resultante sobre a porção sombreada de fluido é calculado considerando-se que:

- o trabalho realizado sobre a porção de fluido pela força de pressão $p_1 \cdot S_1$ é $p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta x_1$;
- o trabalho realizado sobre a porção de fluido pela força de pressão $p_2 \cdot S_2$ é $-p_2 \cdot S_2 \cdot \Delta x_2$ (negativo, pois a força de pressão tem sentido oposto ao do deslocamento da porção fluida);
- o trabalho realizado pela força peso para elevar o fluido desde a altura h_1 até a altura h_2 é igual a $-m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$ (negativo, pois o deslocamento ocorre em sentido contrário ao da força peso).

O trabalho resultante realizado sobre o sistema é dado pela soma dos três termos considerados.

Assim, temos:

$$\tau_{\text{resultante}} = p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot \Delta x_2 - m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

Mas, observe que $S_1 \cdot \Delta x_1 (= S_2 \cdot \Delta x_2)$ corresponde ao volume da porção de fluido considerado e pode ser expresso como a relação entre a massa de fluido e a sua densidade $\left(\frac{m}{\rho}\right)$, em que ρ , a densidade do fluido, é suposta constante. Observe também que estamos considerando que o fluido seja incompressível, pois admitimos que $S_1 \cdot \Delta x_1 = S_2 \cdot \Delta x_2$.

Assim, o trabalho da força resultante sobre o sistema pode ser escrito como:

$$\tau_{\text{resultante}} = (p_1 - p_2) \cdot \frac{m}{\rho} - m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

A variação da energia cinética do sistema é dada por:

$$\Delta E_c = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}$$

O teorema da energia cinética estabelece que o trabalho resultante realizado sobre o sistema deve ser igual à variação de sua energia cinética. Temos, então:

$$(p_1 - p_2) \cdot \frac{m}{\rho} - m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}$$

Multiplicando-se todos os termos da expressão por $\frac{\rho}{m}$ e rearranjando-se as parcelas teremos, finalmente:

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad (\text{teorema de Bernoulli})$$

Como os índices 1 e 2 se referem a duas posições quaisquer do fluido no tubo, podemos suprimi-los e escrever, para qualquer ponto do fluido, que:

$$p + \frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = \text{constante}$$

Essa relação nos mostra – principalmente – que, em uma canalização horizontal, um estrangulamento implica – pela equação da continuidade – um aumento na velocidade do fluxo e, conseqüentemente, uma diminuição de pressão.

Nessa relação, a soma $p + \rho \cdot g \cdot h$ é denominada **pressão estática** (já estudada no capítulo 17 do volume 1), enquanto o termo $\frac{\rho \cdot v^2}{2}$ é a **pressão dinâmica**, exercida pelo fluido em movimento.

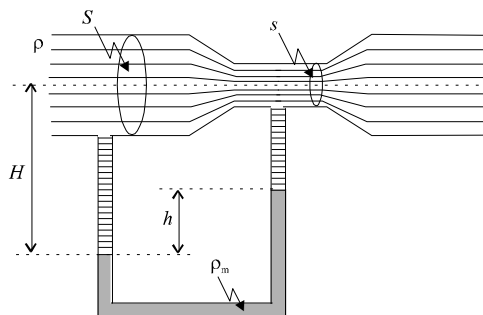
Aplicações do teorema de Bernoulli

O teorema de Bernoulli pode ser aplicado a um grande número de situações práticas. A seguir, analisamos as principais aplicações desse teorema em situações do nosso dia-a-dia e também em situações mais técnicas.

* O medidor de Venturi

Consiste em um medidor que é inserido em uma canalização de secção transversal S para medir a velocidade de escoamento v_1 de um fluido incompressível, de massa específica ρ , através dela.

Um manômetro tem uma de suas extremidades inserida num estrangulamento, com área de secção transversal s , e a outra extremidade na canalização de área S . Seja ρ_m a densidade do líquido manométrico (mercúrio, por exemplo). Por simplificação, vamos considerar que a tubulação é horizontal.



Pelo teorema de Bernoulli, devemos ter:

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} \quad \text{(I)}$$

Mas, pela equação da continuidade:

$$S \cdot v_1 = s \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{S}{s} \quad \text{(II)}$$

Então, substituindo (II) em (I), temos:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \left[\left(\frac{S}{s} \right)^2 - 1 \right] \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} \left(\frac{S^2 - s^2}{s^2} \right) \quad \text{(III)}$$

A relação de Stevin, da hidrostática, permite obter:

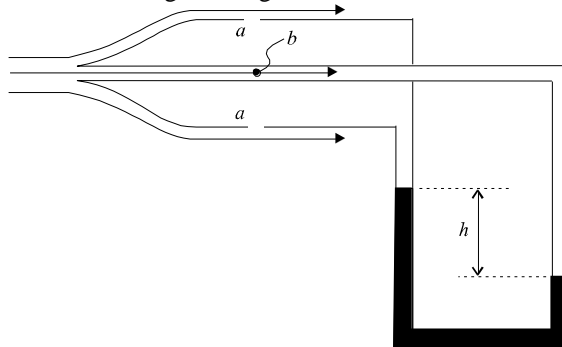
$$p_1 + \rho \cdot g \cdot H = p_2 + \rho \cdot g \cdot (H - h) + \rho_m \cdot g \cdot h \Rightarrow p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) \cdot g \cdot h \quad \text{(IV)}$$

Finalmente, substituindo (III) em (IV), chegamos a:

$$v_1 = s \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (\rho_m - \rho) \cdot g \cdot h}{\rho \cdot (S^2 - s^2)}}$$

* O tubo de Pitot

O tubo de Pitot é um dispositivo utilizado para medir a velocidade de escoamento de um gás – ar, por exemplo. Tal dispositivo está ilustrado na figura a seguir.



As aberturas a são paralelas à direção de escoamento do ar e bastante afastadas da parte posterior para que a velocidade v do fluxo de ar e a pressão fora dela não sejam perturbadas pelo tubo. Seja p_a a pressão estática do ar no ramo esquerdo do manômetro, que está ligado a essas aberturas.

A abertura do ramo direito do manômetro é perpendicular à corrente e, em b , a velocidade reduz-se a zero; logo, nessa região, a pressão total do ar é p_b (maior que p_a , como nos mostra a figura).

O teorema de Bernoulli fornece então: $p_a + \frac{\rho \cdot v^2}{2} = p_b$ (I)

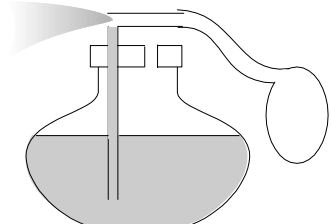
A relação de Stevin, aplicada ao líquido do manômetro, fornece: $p_a + \rho_m \cdot g \cdot h = p_b$ (II)

Comparando (I) e (II), obtemos: $\frac{\rho \cdot v^2}{2} = \rho_m \cdot g \cdot h \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_m \cdot g \cdot h}{\rho}}$

O tubo de Pitot pode ser convenientemente calibrado de modo que forneça o valor da velocidade v diretamente. Nesse caso, o tubo de Pitot torna-se um velocímetro e seu uso é bastante comum em aviões.

* **A bomba *spray***

O esquema abaixo ilustra uma bomba *spray* (atomizador) utilizada em frascos de perfume.



A bomba de borracha ao ser comprimida expelle o ar contido em seu interior a uma alta velocidade. De acordo com o teorema de Bernoulli, a pressão do ar fluindo a alta velocidade através da região superior do tubo vertical é menor que a pressão atmosférica normal atuando na superfície do líquido contido no frasco. Dessa maneira, o líquido é empurrado tubo acima devido à diferença de pressão. Ao atingir o topo do tubo, a coluna líquida é fragmentada em pequenas gotículas (*spray*).

* **O empuxo dinâmico em uma asa**

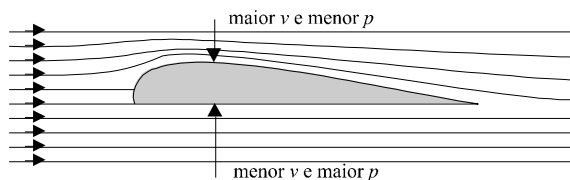
O empuxo dinâmico é a força exercida sobre um corpo, devida ao movimento desse corpo em um fluido.

Uma superfície aerodinâmica – como uma asa de avião ou um aerofólio de carro de corrida ou mesmo as aletas de uma lancha – é desenhada de tal maneira que, ao se movimentar através de um fluido perturba-o de tal modo que, em algumas regiões, as linhas de corrente são mais próximas e em outras regiões elas não são afetadas.

A figura abaixo mostra as linhas de corrente de um fluxo de ar nas proximidades de uma asa de avião, mostrada em corte.

Observe que acima da asa as linhas de corrente estão mais comprimidas, indicando que nessa região a velocidade do fluido é maior. Assim, pelo teorema de Bernoulli $\left(p + \frac{\rho \cdot v^2}{2} = \text{constante} \right)$, a pressão na

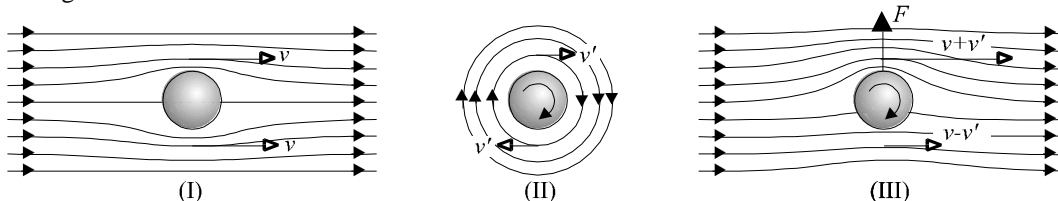
região acima da asa deve ser menor e, portanto, existirá uma força resultante dirigida para cima (empuxo dinâmico). Esse empuxo dinâmico é, geralmente, chamado de **sustentação**.



* **O empuxo dinâmico em uma bola girante**

O empuxo dinâmico também pode ser observado numa bola girante. Tal efeito é bastante explorado no mundo esportivo, principalmente no tênis, no golfe e no futebol. É muito comum no futebol, na cobrança de uma falta com bola parada, a bola, depois de chutada, descrever uma curva e enganar o goleiro.

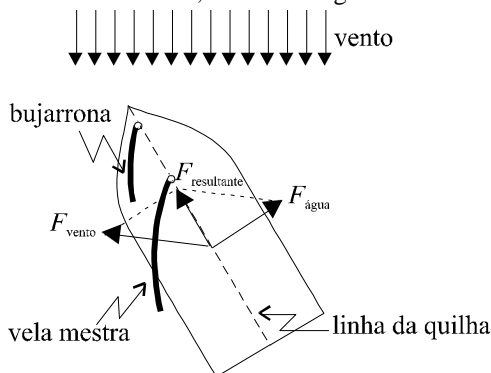
As figuras seguintes mostram as linhas de corrente de um fluido em torno de uma bola que translada sem girar (I), as linhas de corrente em torno de uma bola que apenas gira (II) e a superposição dos dois movimentos (III). Note que o empuxo dinâmico, mostrado em (III), faz com que a bola seja desviada de sua direção original.



* **O empuxo dinâmico em uma vela**

O teorema de Bernoulli também pode explicar como um veleiro pode se deslocar quase que contra o vento.

Para melhor entender como isso acontece, observe a figura abaixo.



Quando navegando contra o vento, a vela mestra deve ser posicionada a meio ângulo entre a direção do vento e o eixo do barco (linha da quilha). Assim, a pressão atmosférica normal atrás da vela mestra é maior que a pressão à sua frente, onde a velocidade do fluxo de ar é maior devido ao estreitamento entre a bujarrona e a vela mestra, e isso origina uma força F_{vento} , conforme mostrado na figura, que impulsiona o barco.

A força resultante no barco, devido ao vento e ao efeito de Bernoulli, atua quase que na perpendicular à vela e isso tenderia a deslocar o barco lateralmente se não houvesse uma porção da quilha estendendo-se verticalmente abaixo da linha-d'água, a bolina. A água exerce, então, uma força quase que perpendicular à bolina ($F_{\text{água}}$), ou seja, quase perpendicular à quilha do barco. A resultante dessas duas forças, a força $F_{\text{resultante}}$, é quase que diretamente dirigida para a frente do barco, de modo que o barco se desloca contra o vento.

Observação: Deve-se ressaltar que o empuxo dinâmico é diferente do empuxo estático. O empuxo estático corresponde a uma força vertical e dirigida para cima, com intensidade igual ao peso de fluido deslocado e que atua em um corpo imerso em um fluido em repouso, como em um balão por exemplo (ver teorema de Arquimedes, capítulo 17 do volume 1). O empuxo dinâmico está sempre associado ao movimento relativo entre um corpo – uma asa de avião, um aerofólio, uma vela ou uma bola girante – e um fluido.

Para fazer em casa!

Neste experimento bastante simples você irá comprovar o teorema de Bernoulli e observar a ação do empuxo dinâmico. Para tanto você precisará unicamente de uma folha de papel e um pouco de fôlego.

Segure a folha de papel próximo à boca e sopre o ar com força na região acima da superfície do papel.



Observe que o ar abaixo da folha permanece praticamente em repouso. Assim, pelo teorema de Bernoulli, a pressão do ar abaixo da folha de papel é maior que a pressão na superfície superior.

Devido a essa diferença de pressão do ar, surge uma força resultante que tende a levantar a folha de papel.

Em um avião, é uma força dessa natureza que, aplicada às asas, sustenta o avião no ar. Num carro de corrida, como os de Fórmula 1 e Fórmula Indy, os aerofólios são projetados de tal maneira que essa força resultante age de maneira a forçar o carro contra o solo, o que aumenta a aderência e permite ao carro executar curvas com velocidades mais altas.

Exercícios resolvidos

3. Água quente circula pela tubulação de um sistema de aquecimento em uma casa. Se a água é bombeada, no térreo, com velocidade de 0,50 m/s através de um cano com 4,0 cm de diâmetro sob pressão de 3,0 atm, determine a velocidade de escoamento e a pressão da água em um cano com 2,6 cm de diâmetro, localizado no andar superior, 5 m acima do térreo.

Considere: $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $1 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

Solução

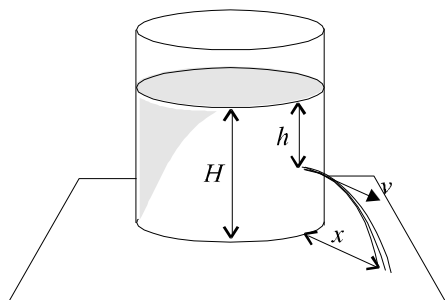
Podemos, inicialmente, calcular a velocidade do fluxo de água no segundo pavimento usando a equação da continuidade. Teremos, então:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \Rightarrow \pi \cdot (0,020)^2 \cdot 0,50 = \pi \cdot (0,013)^2 \cdot v_2 \Rightarrow \boxed{v_2 \cong 1,2 \text{ m/s}}$$

A pressão na água, no pavimento superior, é obtida pelo teorema de Bernoulli. Tomando como nível de referência ($h = 0$) o pavimento inferior, teremos:

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 &= p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_2 &= p_1 + \frac{\rho \cdot (v_1^2 - v_2^2)}{2} + \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow p_2 &= 3,0 \cdot 10^5 + \frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot (0,50^2 - 1,2^2)}{2} + 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot (0 - 5) \Rightarrow \\ &\boxed{p_2 = 2,44 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 2,44 \text{ atm}} \end{aligned}$$

4. Um tanque contém água até a altura H ; faz-se um orifício na sua parede lateral, à profundidade h abaixo da superfície da água.



Determine:

- a) a velocidade v com que a água emerge pelo orifício;
- b) o alcance horizontal x do jato d'água ao atingir o piso.

Solução

a) Seja o ponto 1 do líquido um ponto de sua superfície livre e o ponto 2, um ponto do líquido junto à abertura lateral do recipiente.

Se considerarmos que o recipiente é bastante largo, então a velocidade da água na superfície livre do líquido (ponto 1) é praticamente nula ($v_1 = 0$). Adotaremos o nível de referência passando pelo orifício de saída, o que torna $h_2 = 0$ e $h_1 = h$. Note ainda que, devido ao fato de os pontos 1 e 2 do líquido estarem em contato com o ar atmosférico, devemos ter $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$. Para a determinação da velocidade v da água na saída do orifício (ponto 2), devemos aplicar o teorema de Bernoulli. Então, temos:

$$\begin{aligned}
 p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 &= p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow p_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot h &= p_{\text{atm}} + \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \\
 \Rightarrow \rho \cdot g \cdot h &= \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad g \cdot h = \frac{v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \quad (\text{lei de Torricelli})
 \end{aligned}$$

b) O alcance horizontal x do jato pode ser facilmente calculado a partir da teoria do lançamento horizontal (ver página 145 do volume 1). Observe que, na direção vertical, a água cai sob aceleração igual à aceleração gravitacional g . Para cair de uma altura $(H - h)$ levará um tempo t , dado por:

$$\Delta s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \quad (\text{MUV}) \quad \Rightarrow \quad (H - h) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot (H - h)}{g}}$$

Na direção horizontal, a velocidade da água é constante, pois a aceleração é nula. Então, no intervalo de tempo $\Delta t = t$, com velocidade v , o jato percorre uma distância $\Delta s = x$, dada por:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (\text{MU}) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2 \cdot (H - h)}{g}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2 \cdot \sqrt{h \cdot (H - h)}}$$

Exercícios propostos

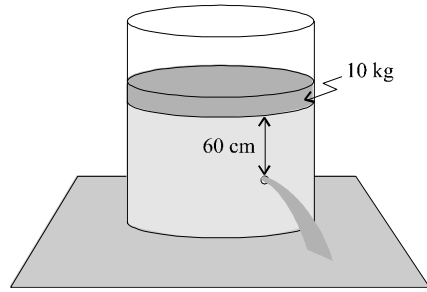
P.8 (U.F.Santa Maria-RS) Água, cuja densidade é 10^3 kg/m^3 , escoar através de um tubo horizontal, com velocidade de 2 m/s , sob pressão de $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Em certo ponto, o tubo apresenta um estreitamento pelo qual a água flui à velocidade de 8 m/s . A pressão, nesse ponto, em N/m^2 , é:

- a) $0,5 \cdot 10^5$
- b) $1,0 \cdot 10^5$
- c) $1,7 \cdot 10^5$
- d) $4,2 \cdot 10^5$
- e) $8,0 \cdot 10^5$

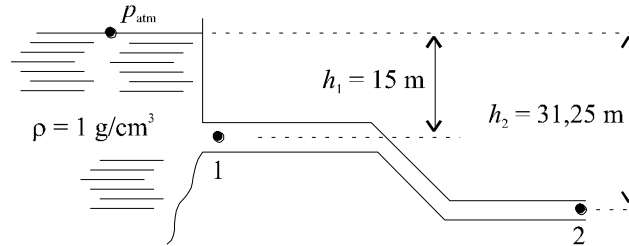
P.9 Um galpão é coberto por um telhado com área de 400 m^2 . Um vento forte sopra a 72 km/h sobre esse telhado. O ar dentro do galpão está em repouso e sob pressão de 1 atm . Considere que a densidade do ar seja $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ e adote $1 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Determine:

- a) a diferença de pressão do ar que circunda o telhado;
- b) a força resultante que atua sobre ele.

P.10 Um tanque, com área de secção transversal $S = 0,07 \text{ m}^2$, contém água ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$). Um êmbolo, com massa total $m = 10 \text{ kg}$, repousa sobre a superfície da água. Um orifício circular, com diâmetro de $1,5 \text{ cm}$ é aberto na parede lateral do reservatório a uma profundidade de 60 cm abaixo da superfície da água. Qual é a vazão inicial de água, em litros/s, através do orifício?



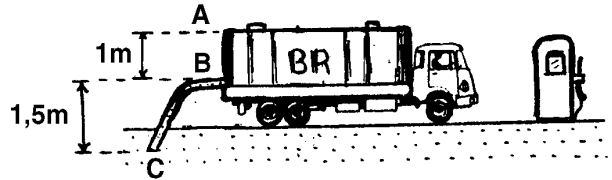
P.11 (UFPA) A figura abaixo representa um grande reservatório de água de uma represa, com uma canalização nele acoplada, cujas áreas das secções são 900 cm^2 em 1 e 600 cm^2 em 2.



Admita que a água possa ser considerada um fluido ideal e que escoe em regime permanente. Sabendo-se que a aceleração da gravidade vale 10 m/s^2 e que a pressão atmosférica é igual a 10^5 N/m^2 , pede-se:

- a velocidade, em m/s , com que a água flui no ponto 2;
- a vazão, em m^3/s , da água;
- a pressão, em N/m^2 , no ponto 1.

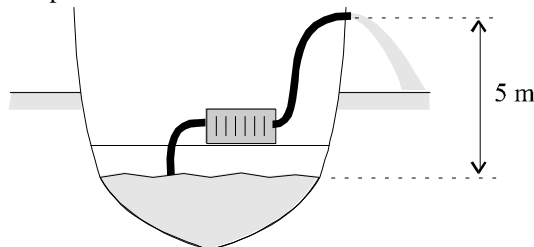
P.12 (UFPA) Em 5 minutos, um carro-tanque descarrega 5.000 litros de gasolina através de um mangote, cuja secção transversal tem área igual a $0,00267 \text{ m}^2$ (ver figura abaixo).



Pergunta-se:

- Qual a vazão volumétrica média desse escoamento, em litros/segundo?
- Considerando os dados indicados na figura e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, qual a vazão volumétrica, em litros/segundo, no início do processo de descarga do combustível, quando o nível de líquido no tanque está no ponto A?
- O valor obtido no item *b* deve ser maior, menor ou igual ao do item *a*?

P.13 Uma bomba de recalque é usada para bombear água para fora de um navio. A mangueira da bomba tem um diâmetro de $3,0 \text{ cm}$ e a bomba drena a água, através da mangueira, até a saída, 5 m acima da linha-d'água, abandonando-a com velocidade de $4,0 \text{ m/s}$. Adote para a água $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ e considere $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$.

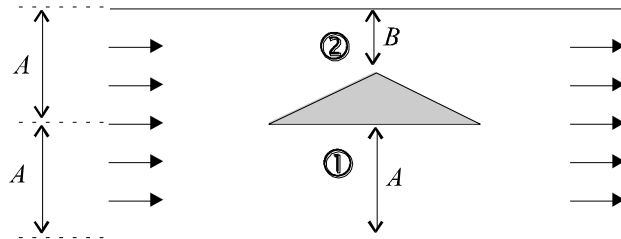


Determine:

- a vazão de água através da mangueira;
- a diferença de pressão fornecida pela bomba de recalque;
- a potência da bomba.

P.14 (U.F.Juiz de Fora-MG) Na figura abaixo representamos um objeto de perfil triangular dentro de um túnel de vento. A área total do túnel de

vento é $2 \cdot A$, e a área acima do topo da seção triangular é B . Admitindo que o escoamento do ar é estacionário e que este se comporta como um fluido ideal (incompressível, sem atrito), responda às questões abaixo.



a) A velocidade do ar no topo do triângulo (região 2) é maior ou menor que a velocidade do ar na parte inferior (região 1)? Explique.

b) Utilizando a equação de Bernoulli, ($p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$, para este caso), calcule a relação entre as pressões nas regiões 1 e 2.

c) Com base nas respostas dos itens *a* e *b*, explique como um planador pode voar.

P.15 Uma asa de avião tem área de 5 m^2 e massa de 200 kg . A velocidade do fluxo de ar acima da face superior é de 70 m/s e sob a face inferior, 50 m/s . Considere que a densidade do ar seja igual a $1,29 \text{ kg/m}^3$ e adote $g = 10 \text{ m/s}^2$. Determine:

- a diferença de pressão entre a face superior e a face inferior da asa;
- a força de sustentação da asa;
- a força resultante na asa.

P.16 Um medidor de Venturi tem diâmetro de 10 cm no tubo e de $5,0 \text{ cm}$ no estreitamento. A pressão da água no tubo é de $0,85 \text{ atm}$ e no estreitamento é de $0,35 \text{ atm}$. Determine a vazão de água em litros/s. Considere $1 \text{ atm} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e $\rho_{\text{água}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

P.17 Um tubo de Pitot é montado na asa de um avião, para determinar a velocidade da aeronave em relação ao ar. O tubo contém mercúrio ($\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) e indica uma diferença de nível de 11 cm . Considerando que $g = 10 \text{ m/s}^2$ e que a densidade do ar seja $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$, qual é a velocidade do avião em relação ao ar, em km/h ?

Gabarito

Exercícios propostos

P.1 c

P.2 18 min

P.3 a) 200,0 m³/s

b) 5,0 m/s

P.4 0,80 m

P.5 5,3 m/s

P.6 8,4 m/s

P.7 47 cm/s

P.8 c

P.9 a) 258 N/m²

b) 1,032 · 10⁵ N, dirigida para cima

P.10 0,7 litro/s

P.11 a) 25 m/s

b) 1,5 m³/s

c) 1,11 · 10⁵ N/m²

P.12 a) 16,67 litros/s

b) 18,69 litros/s

c) O valor obtido no item *b* é

maior que o obtido no item *a*, pois no início do processo de descarga (nível da gasolina no ponto *A*) a velocidade na saída do mangote é 7 m/s e, ao final do processo (com o nível da gasolina no ponto *B*), a velocidade na saída diminui para 5,4 m/s. Dessa forma, a vazão média assume um valor intermediário entre o da vazão inicial e o da vazão final.

P.13 a) 2,83 litros/s

b) 5,8 · 10⁴ N/m²

c) 164 W = 0,22 hp

P.14 a) A velocidade do ar na região 2 é maior que na região 1.

A equação da continuidade, aplicada à região superior da asa, estabelece que:

$$v_1 \cdot A = v_2 \cdot B \Rightarrow v_2 = \frac{A}{B} \cdot v_1$$

Então, como $A > B$, podemos concluir que $v_2 > v_1$.

b) O teorema de Bernoulli estabelece que a soma da pressão estática (p) com

a pressão dinâmica $\left(\frac{1}{2} \rho v^2\right)$ deve ser constante.

Então, como no ponto 2 a pressão dinâmica é maior (devido à maior velocidade do fluxo de ar), concluímos que a pressão estática será menor, isto é: $p_2 < p_1$.

c) Na região inferior da asa a pressão estática é maior. Assim, a força de pressão do ar é maior na região inferior da asa quando comparada à força de pressão que atua na região superior. A resultante dessas forças de pressão, a sustentação, é uma força dirigida para cima.

P.15 a) 1.548 N/m²

b) 7.740 N, dirigida para cima

c) 5.740 N, dirigida para cima

P.16 20,3 litros/s

P.17 548 km/h