

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA**  
**DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

# **OSCILAÇÕES E ONDAS**

Joecir Palandi

e

Dartanhan B. Figueiredo  
Antonio V. L. Porto  
João C. Denardin  
Paulo R. Magnago

**SANTA MARIA**  
**2001**

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	03
I. MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME	
I.1. Definição do Movimento Circular Uniforme	04
I.2. Aceleração Centrípeta	05
I.3. Forças Centrípeta e Centrífuga	07
I.4. Imponderabilidade	08
I.5. O Movimento da Lua ao redor da Terra	09
I.6. Força de Coriolis	10
II. MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES	
II.1. MHS como Projeção do MCU	12
II.2. Relações Matemáticas	15
II.3. Definição de MHS	16
II.4. Pêndulo Simples	17
II.5. Sistema Corpo-Mola	20
II.6. Energia no MHS	23
II.7. Ressonância	24
III. ONDAS MECÂNICAS HARMÔNICAS	
III.1. Diferença de Fase	26
III.2. Ondas Mecânicas Unidimensionais	29
III.3. Elementos de uma Onda	30
III.4. Transferência de Energia pela Onda	31
III.5. Equação da Onda	32
III.6. Princípio de Superposição	33
III.7. Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo	34
III.8. Ondas Estacionárias	35
III.9. A Cuba de Ondas	37
III.10. Reflexão e Refração	38
III.11. Princípio de Huygens	39
III.12. Difração	40
III.13. Efeito Doppler	40

## INTRODUÇÃO

No que concerne aos professores que lecionam Física no ensino médio, tanto aqueles com formação específica quanto aqueles sem essa formação e que constituem a maioria, a necessidade de uma educação continuada não fica satisfeita devido a pouca oferta de material impresso adequado (livros, cadernos didáticos, artigos de divulgação, etc.) e, também, devido à dificuldade de acesso a cursos de atualização, quando esses são oferecidos. Essa situação vem gerando, numa parcela ponderável desses professores, uma carência crônica de conteúdos que, somada à importância atribuída ao livro texto na determinação da seqüência dos conteúdos a serem apresentados aos seus alunos e no próprio método de ensino, representa uma importante limitação ao ensino de Física na escola média.

Além disso, a idéia de que basta a aplicação coerente das fórmulas para que seja atingida a aprendizagem significativa dos conceitos, princípios e leis fundamentais é compartilhada pela maioria dos professores e, mesmo quando a importância das atividades experimentais é reconhecida, são poucos aqueles que as praticam e menos ainda aqueles que as exploram em toda a sua potencialidade. A experimentação no ensino de Física pode ser um instrumento útil no processo ensino-aprendizagem desde que não seja estranha à seqüência lógica dos conteúdos, sendo acompanhada de uma estratégia que motive a introdução de novos temas, detecte problemas e determine relações entre variáveis.

Esse caderno, que o Grupo de Ensino de Física da UFSM (GEF-UFSM) ora oferece, foi escrito para os professores do ensino médio, embora possa ser usado também por seus alunos, numa tentativa de clarificar, aprofundar e complementar os conteúdos de Movimento Circular Uniforme, Movimento Harmônico Simples e Ondas Mecânicas Harmônicas. Além dos conteúdos usuais, o primeiro capítulo discute a força centrífuga, a imponderabilidade, o movimento da Lua ao redor da Terra e a força de Coriolis, o segundo capítulo, massa gravitacional e massa inercial, freqüência própria e ressonância, e o terceiro capítulo, a transferência de energia pela onda, velocidade de fase e velocidade de grupo e o princípio de Huygens, entre outros.

O GEF-UFSM defende uma abordagem ao ensino de Física que integre teoria e experimento, mesmo porque o próprio conhecimento científico é assim construído. Esse caderno didático contém as atividades práticas e/ou experimentais que puderam ser desenvolvidas em um curso com o título Oscilações e Ondas, de 30 horas/aula, desenvolvido no segundo semestre de 2001, no espaço Ciência Viva do Centro de Ciências Naturais e Exatas da UFSM, onde dois acadêmicos do Curso de Licenciatura em Física ministravam, sob orientação do GEF-UFSM, aula a alunos selecionados entre os regularmente matriculados no ensino médio da rede pública de Santa Maria. Além disso, devido às limitações impostas ao número de páginas pelo próprio fato de se tratar de um caderno, foi colocada ênfase na visão geométrica dos movimentos, procurando mostrar suas relações mútuas, e em fenômenos pouco discutidos ao nível do ensino médio, enquanto que temas como interferência, difração e efeito Doppler, por exemplo, foram tratados muito rapidamente.

O GEF-UFSM espera que esse caderno seja útil àqueles aos quais foi dirigido e se abre a quaisquer críticas e/ou sugestões que possam vir a melhorá-lo.

## I. MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

---

Na Natureza, movimentos circulares aparecem associados, por exemplo, a fenômenos astronômicos: os movimentos dos planetas ao redor do Sol e os movimentos das luas ao redor dos respectivos planetas podem ser considerados, com boa aproximação, circulares e uniformes. Movimentos circulares uniformes aparecem também nas atividades humanas como, por exemplo, nas máquinas, onde rodas e engrenagens giram ao redor de eixos, etc. A palavra uniforme, neste contexto, se refere ao fato de o módulo da velocidade linear do corpo em questão ser constante. Mas quando um corpo se desloca sobre uma trajetória circular, embora o módulo do vetor velocidade linear possa ser constante, a direção desse vetor varia continuamente, de modo que existe uma aceleração (centrípeta) e, portanto, uma força resultante não nula atuando sobre o corpo. Por outro lado, o vetor velocidade angular é constante no movimento circular uniforme.

### I.1. Definição do Movimento Circular Uniforme

Uma partícula está em um movimento circular uniforme (MCU) quando se movimenta sobre uma circunferência com velocidade linear de módulo constante. O vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória (Fig.1), ou seja, varia continuamente porque sua direção varia. Na Fig.1, que representa o vetor velocidade linear de uma partícula em MCU em dois instantes de tempo genéricos  $t_1$  e  $t_2$ , temos  $\vec{v}(t_2) \neq \vec{v}(t_1)$  mas  $v(t_2) = v(t_1)$ .

#### Período e Frequência

O tempo levado pela partícula para percorrer uma vez a sua trajetória é o período ( $T$ ) do movimento. Por outro lado, o número de voltas dadas pela partícula na unidade de tempo é a frequência ( $f$ ) do movimento. Assim:

$$f = 1/T$$

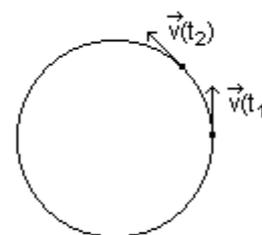


Fig.1

Para termos uma idéia mais concreta da veracidade da expressão  $f = 1/T$  consideremos uma partícula em MCU que leva 4 s para percorrer exatamente uma vez a circunferência que constitui a sua trajetória. Sendo assim, o período do movimento é justamente 4 s. Por outro lado, como a partícula percorre uma volta em 4 s, em um segundo ela percorre  $\frac{1}{4}$  de volta. Portanto, a frequência do movimento da partícula vale  $1/(4 \text{ s})$  ou seja,  $\frac{1}{4} \text{ Hz}$ .

#### Velocidade Linear

O módulo da velocidade linear ( $\vec{v}$ ) da partícula é definido como a distância percorrida sobre a trajetória dividida pelo intervalo de tempo levado para percorrê-la. Assim, tomando como intervalo de tempo o período:

$$v = 2\pi R/T$$

A direção do vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória da partícula. Aqui estamos falando da velocidade linear instantânea da partícula. Para entender por que o vetor velocidade linear é tangente à trajetória temos que levar em conta que esta velocidade é definida por um processo de limite. Por exemplo, para a definição da

velocidade linear instantânea da partícula no ponto A (Fig.2), correspondente à posição da partícula no instante de tempo  $t_A$ , consideremos a seqüência de pontos C, B, etc., correspondentes às posições da partícula nos instantes de tempo  $t_C$ ,  $t_B$ , etc., cada vez mais próximos de A.

Tomando o módulo do vetor deslocamento<sup>1</sup> entre A e C e dividindo-o pelo intervalo de tempo  $\Delta t_{AC}$  levado pela partícula para se deslocar entre A e C, obtemos  $v_{AC}$ , o módulo do vetor velocidade média entre A e C, tomando o módulo do vetor deslocamento entre A e B e dividindo-o pelo intervalo de tempo  $\Delta t_{AB}$  levado pela partícula para se deslocar entre A e B, obtemos  $v_{AB}$ , o módulo do vetor velocidade média entre A e B, etc. A seqüência de números  $v_{AC}$ ,  $v_{AB}$ , etc., tende para o número  $v_A$ , o módulo da velocidade linear instantânea da partícula no ponto A. Dizemos, então, que no limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , a velocidade média tende à velocidade instantânea em  $t_A$  (ou no ponto A). Ainda, como as direções das velocidades médias são dadas pelas retas suportes dos vetores deslocamento correspondentes, é fácil ver que no limite  $\Delta t \rightarrow 0$  a velocidade linear (instantânea) tem direção tangente à trajetória no ponto A.

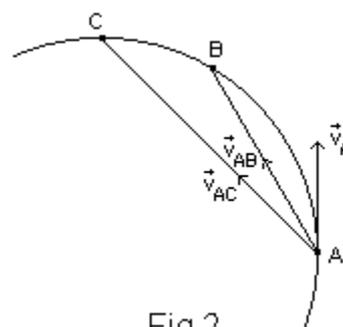


Fig.2

### Velocidade Angular

Se, em vez de considerar a distância percorrida pela partícula sobre sua trajetória, considerarmos o ângulo descrito pela linha que une a partícula ao centro da trajetória, podemos definir a velocidade angular. O módulo de tal velocidade é dado pelo cociente do ângulo descrito (em radianos) pelo intervalo de tempo correspondente. Assim, tomando como intervalo de tempo o período (e lembrando que  $f = 1/T$ ):

$$\omega = 2\pi/T \quad \text{ou} \quad \omega = 2\pi f$$

A direção desta velocidade angular é perpendicular ao plano da trajetória e o sentido, dado pela regra da mão direita: com os dedos da mão direita colocados ao longo da trajetória descrita pela partícula e na mesma direção do movimento, o polegar aponta o sentido da velocidade.

Observando as fórmulas acima, temos a seguinte relação entre os módulos das velocidades linear e angular:

$$v = \omega R$$

### I.2. Aceleração Centrípeta

Segundo a primeira lei de Newton, se é nula a força resultante sobre uma partícula, então ela está parada ou em movimento retilíneo uniforme. Como  $\vec{v}(t_2) \neq \vec{v}(t_1)$ , ou seja, como  $\Delta \vec{v} \neq 0$ , deve existir uma força resultante não nula sobre a partícula em MCU. Em outras palavras, existe uma aceleração. E como  $v(t_2) = v(t_1)$ , ou seja, como o módulo do vetor velocidade linear é constante, o vetor aceleração não

<sup>1</sup> Deslocamento é o vetor com origem na posição inicial da partícula e extremidade na posição final, não importando a trajetória da partícula entre as posições inicial e final consideradas. A distância percorrida é o escalar definido pelo comprimento da trajetória da partícula entre as posições inicial e final consideradas.

pode ter componente na direção do vetor velocidade linear. Então, o vetor aceleração (instantânea) da partícula, em qualquer instante de tempo, aponta para o centro da sua trajetória. Esta aceleração, chamada de aceleração centrípeta, tem módulo:

$$a_c = v^2 / R$$

onde  $v$  representa o módulo da velocidade linear da partícula e  $R$ , o raio da trajetória.

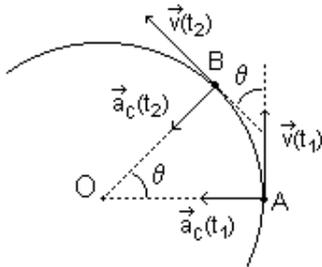
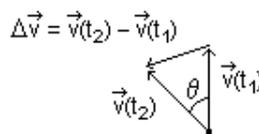


Fig.3(a)



(b)

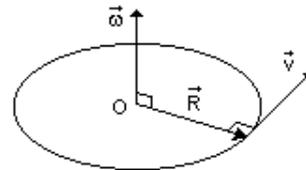


Fig.4

Para demonstrar a fórmula acima devemos observar o seguinte. Em primeiro lugar, o triângulo com vértices nos pontos O, A e B (Fig.3(a)) é semelhante ao triângulo formado por  $\vec{v}(t_1)$ ,  $\vec{v}(t_2)$  e  $\Delta\vec{v}$  (Fig.3(b)), já que ambos têm dois lados de mesmo comprimento fazendo entre si o mesmo ângulo  $\theta$ . Em segundo lugar, para  $t_2 \rightarrow t_1$ , já que estamos calculando o módulo da aceleração instantânea, o arco de circunferência e a corda entre os pontos A e B se confundem e têm comprimento  $v \Delta t$ . Assim, podemos escrever:

$$\frac{R}{v \Delta t} = \frac{v}{|\Delta\vec{v}|} \quad \text{ou} \quad \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

de onde se segue a fórmula procurada já que, para  $t_2 \rightarrow t_1$ ,  $a_c = |\Delta\vec{v}| / \Delta t$ . Em termos do módulo da velocidade angular, o módulo da aceleração centrípeta é dado por:

$$a_c = \omega^2 R$$

Considerando o vetor  $\vec{R}$ , do centro da trajetória até a posição da partícula, e levando em conta que o vetor  $\vec{\omega}$  é perpendicular ao plano da trajetória da partícula, com sentido dado pela regra da mão direita (Fig.4), correspondentemente às fórmulas  $v = \omega R$  e  $a_c = \omega^2 R$ , que expressam os módulos da velocidade linear e da aceleração centrípeta, respectivamente, de uma partícula em MCU, temos as relações vetoriais:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

### Atividade

Desenhe uma circunferência com uns 8 cm de raio e sobre ela assinale dois pontos (A e B) relativamente próximos um do outro (Fig.5). Em cada um desses pontos, desenhe uma flecha de uns 3 cm de comprimento para representar a respectiva velocidade linear ( $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$ ) de uma partícula em MCU.

Transporte a flecha que representa  $\vec{v}_B$  paralelamente a si mesma de modo que sua origem coincida com a origem da flecha que representa  $\vec{v}_A$  e represente o vetor  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ .

O vetor aceleração centrípeta tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor  $\Delta\vec{v}$  e ambos devem apontar para o centro da trajetória circular da partícula em MCU. Discuta o resultado do seu desenho quanto à direção esperada de  $\Delta\vec{v}$ .

Repita todo o procedimento descrito acima para pontos A e B cada vez mais próximos um do outro. Compare cada novo resultado com aqueles obtidos antes.

Discuta o caso limite em que os pontos A e B estão tão próximos um do outro que se confundem.

Discuta a relação de todo esse procedimento com a definição rigorosa de aceleração centrípeta como um processo de limite.

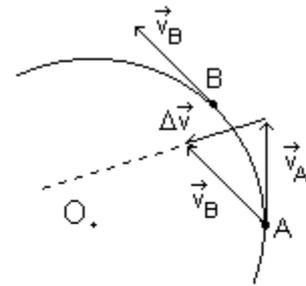


Fig.5

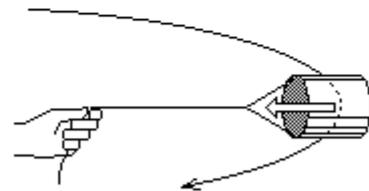


Fig.6

### I.3. Forças Centrípeta e Centrífuga

A força sobre a partícula (de massa  $m$ ) em MCU é chamada força centrípeta e tem módulo:

$$F_C = mv^2 / R$$

No contexto do movimento circular uniforme discute-se, normalmente, além da força centrípeta também a assim chamada força centrífuga. Para colocar em termos concretos a discussão, consideremos o exemplo de uma lata vazia girando em movimento circular uniforme em um plano horizontal (Fig.6). Sob o ponto de vista da pessoa que está girando a lata (observador em um referencial inercial), existem sobre a lata três forças: a força peso, vertical e apontando para baixo, a força de resistência exercida pelo ar, horizontal e apontando para trás, e a força de tração do fio, horizontal e apontando para o centro da trajetória. Como a força peso e a força de resistência do ar não são efetivas no movimento circular uniforme, vamos ignorá-las. Assim, a força que o fio exerce sobre a lata é que faz o papel de força centrípeta. Não existe qualquer outra força sobre a lata que pudesse fazer o papel de força centrífuga.

Agora, suponhamos que exista um inseto dentro da lata em MCU, apoiado no fundo da lata. O inseto compartilha o movimento da lata, isto é, está, também, em MCU no referencial considerado. O movimento circular do inseto é causado pela força que o fundo da lata exerce sobre ele. Assim, sob o ponto de vista da pessoa que está girando a lata (observador em um referencial inercial), existem sobre o inseto três forças: a força peso, vertical e apontando para baixo, a força de atrito devido ao fundo da lata, vertical e apontando para cima, e a força que o fundo da lata exerce sobre ele, horizontal e apontando para o centro da trajetória. A força peso e a força de atrito cancelam-se mutuamente. Então, para o observador considerado, o inseto tende a se mover em uma linha reta horizontal por inércia, mas é impedido a cada instante pela força que o fundo da lata exerce sobre ele. A resultante das forças que agem sobre o inseto é esta força que, sendo dirigida para o centro da trajetória, faz, portanto, o papel de força centrípeta. Não existe qualquer outra força sobre o inseto que pudesse fazer o papel de força centrífuga.

É claro que, pela terceira lei de Newton, se o fundo da lata exerce uma força sobre o inseto, este exerce uma força sobre o fundo da lata, de mesmo módulo e

direção, mas de sentido contrário. Assim, esta última força, dirigida radialmente para fora, não atua sobre o inseto, mas sobre a lata.

Com o inseto dentro da lata, e ignorando a pequena força de atrito do inseto sobre a lata, a força centrípeta responsável pelo MCU da lata é a resultante da soma vetorial das forças horizontais que o fio e o inseto exercem sobre ela.

Sob o ponto de vista do inseto (observador em um referencial não inercial), existe uma força que o empurra contra o fundo da lata. Esta força é tão real para ele quanto, para nós, a força gravitacional que nos puxa para o centro da Terra. Esta força sobre o inseto, que só existe para ele, que é um observador não inercial, é conhecida como força centrífuga, porque tende a afastá-lo do centro da trajetória circular. Mas o inseto não se afasta do centro da trajetória circular porque é impedido pelo fundo da lata, ou seja, existem duas forças horizontais sobre ele: a força centrífuga e a força que o fundo da lata exerce, ambas com o mesmo módulo e direção, mas de sentido contrário. E nem por isso constituem um par ação-reação no espírito da terceira lei de Newton, mesmo porque estão sobre o mesmo corpo e são de naturezas diferentes. A força centrífuga é um efeito devido ao caráter não inercial do referencial associado ao inseto e não pode ser atribuída a qualquer interação fundamental, e a força que o fundo da lata exerce sobre o inseto é, em última instância, de caráter eletromagnético. Como estão sobre o mesmo corpo, estas forças cancelam-se e o inseto permanece em repouso em relação à lata e ao centro da trajetória circular.

De qualquer modo, como a força que o fundo da lata exerce sobre o inseto é a força centrípeta do seu MCU para o observador em um referencial inercial, temos:

$$F_{CF} = mv^2 / R$$

ou seja, a força centrípeta (vista pelo observador inercial) e a força centrífuga (vista pelo observador não inercial) têm o mesmo módulo.

#### I.4. Imponderabilidade

Consideremos outro exemplo de MCU: em um referencial inercial fixo no centro da Terra, um objeto (de massa  $m$ ) descreve uma órbita circular de raio  $R$  ao redor da Terra (de massa  $M$ )(Fig.7). Sendo a órbita circular, a força gravitacional da Terra sobre o objeto (a força peso do objeto) é a força centrípeta. Assim:

$$mv^2 / R = GMm / R^2$$

onde  $G$  representa a constante universal da gravitação. O raio da órbita fica dado por:

$$R = GM / v^2$$

O raio da órbita depende de  $G$ , uma constante universal, de  $M$ , a massa da Terra, e de  $v$ , o módulo da velocidade linear orbital do objeto. O raio da órbita não depende da massa do objeto. Assim, por exemplo, um astronauta dentro de uma nave espacial e a própria nave, tendo ambos a mesma velocidade linear orbital, têm órbitas com o mesmo raio (Fig.8). Então, astronauta e nave ficam em repouso um em relação

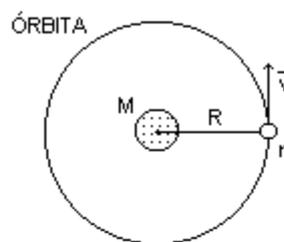


Fig.7

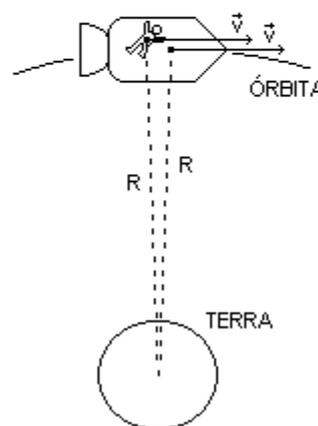


Fig.8

ao outro e o astronauta parece flutuar dentro da nave. Este fenômeno é o que se chama de imponderabilidade e não significa falta de gravidade ou falta de peso, já que são justamente os pesos dos objetos (astronauta e nave, neste caso) que fazem o papel de forças centrípetas para garantir que as respectivas órbitas sejam circulares.

### I.5. O Movimento da Lua ao redor da Terra

Considerando um referencial inercial fixo no centro da Terra, vamos mostrar agora que a Lua cai na direção da Terra porém sem jamais alcançá-la.

Consideremos um certo intervalo de tempo  $\Delta t$  durante o qual a Lua se movimenta de A para B (Fig.9) sobre o arco de circunferência tracejado. Como estamos interessados em tomar os pontos A e B muito próximos um do outro, esse movimento pode ser pensado como a soma de dois movimentos simultâneos e aproximadamente perpendiculares: um movimento retilíneo uniforme (MRU), de A para C, e um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), de C para B. Este último, aproximado, já que a aceleração correspondente, sendo a aceleração gravitacional, só é aproximadamente constante. O triângulo AOC é um triângulo retângulo, com o ângulo reto em A. Então, pelo teorema de Pitágoras:

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2$$

ou:

$$d^2 = 2Rh + h^2$$

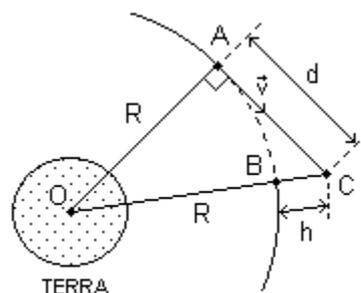


Fig.9

onde h representa a distância entre B e C e d, a distância entre A e C. Como estamos tomando os pontos A e B muito próximos um do outro, podemos considerar  $h \ll R$ , de modo que, também,  $h^2 \ll Rh$ , e podemos desprezar o segundo termo do lado direito da igualdade na expressão acima e escrever, de modo aproximado:

$$d^2 \approx 2Rh$$

Levando em conta que o movimento de A para C é um MRU e o movimento de C para B é um MRUV (aproximado), temos:

$$d = v\Delta t \quad \text{e} \quad h \approx \frac{1}{2}a_c(\Delta t)^2$$

onde v representa o módulo da velocidade linear orbital da Lua e  $a_c$ , o módulo da sua aceleração centrípeta. Com estes resultados, a equação acima fica:

$$v^2(\Delta t)^2 \approx 2R\left(\frac{1}{2}a_c\right)(\Delta t)^2$$

e daí:

$$a_c \approx v^2/R$$

Se os pontos A e B, considerados até aqui como estando muito próximos um do outro, forem considerados infinitesimalmente próximos, ou seja, se tomarmos o limite  $A \rightarrow B$ , ou seja,  $\Delta t \rightarrow 0$ , os dois movimentos considerados (de A para C e de C para B) passam a ser realmente perpendiculares entre si, o movimento de C para B

passa a ser um MRUV exato e todas as expressões matemáticas aproximadas passam também a ser exatas. Em particular, a aceleração  $a_C$  fica exatamente igual a  $v^2/R$ , como deve ser já que representa a aceleração centrípeta do MCU descrito pela Lua ao redor da Terra.

Considerando um intervalo de tempo infinitesimal, o MRUV de C para B pode ser considerado como um movimento de queda da Lua em direção ao centro da Terra porque é vertical e causado pela força gravitacional da Terra sobre a Lua. Mas, apesar deste movimento de queda, a Lua não se aproxima da Terra mais do que o suficiente para compensar o seu afastamento devido ao MRU de A para C. Portanto, a Lua cai em direção ao centro da Terra, mas não se aproxima dele porque existe outro movimento, que tende a afastá-la deste mesmo centro. Os dois movimentos se compensam e a Lua descreve um MCU com aceleração centrípeta  $a_C = v^2/R$ .

## 1.6. Força de Coriolis

A força de Coriolis, assim como a força centrífuga, é um efeito devido ao caráter não inercial do referencial adotado para descrever o movimento e não pode ser atribuída a qualquer interação fundamental. Os efeitos da força de Coriolis podem ser observados, por exemplo, no movimento dos ventos em volta dos centros da baixa pressão e na rotação do plano de oscilação de um pêndulo simples.

Para compreender como aparece a força de Coriolis, vamos considerar uma partícula que se desloca em MRU sobre o eixo X de um referencial inercial XY (Fig.10), deslocando-se do ponto A ao ponto B durante o intervalo de tempo  $\Delta t$  e, também, o movimento da partícula em um referencial não inercial X'Y' que gira em sentido anti-horário, com velocidade angular  $\omega$  em relação ao referencial inercial XY. Os dois referenciais têm origens que coincidem e o eixo ao redor do qual o referencial X'Y' gira é perpendicular ao plano dos eixos X e Y e passa pela origem. Consideremos, ainda, que no instante em que a partícula estava no ponto A, os eixos X e X' coincidiam, assim como coincidiam os eixos Y e Y'. Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , levado pela partícula para se deslocar do ponto A ao ponto B no referencial XY, a partícula se desloca do ponto A' ao ponto C' com um movimento curvilíneo que pode ser decomposto em um MRU, do ponto A' ao ponto B' sobre o eixo X', e um MRUV, do ponto B' ao ponto C', na direção do eixo Y' e em sentido contrário àquele considerado como positivo para esse eixo.

No referencial X'Y', a velocidade da partícula entre os pontos A' e B' tem módulo constante dado por:

$$v' = d/\Delta t$$

Por outro lado, neste mesmo referencial, os pontos A e B têm velocidades de módulo  $v'_A = \omega r'_A$  e  $v'_B = \omega r'_B$ , respectivamente, de modo que a distância percorrida em MRUV entre os pontos B' e C' pode ser escrita:

$$\overline{B'C'} = v'_A \Delta t + \frac{1}{2} a' (\Delta t)^2 \quad \text{e} \quad \overline{B'C'} = \omega r'_B \Delta t$$

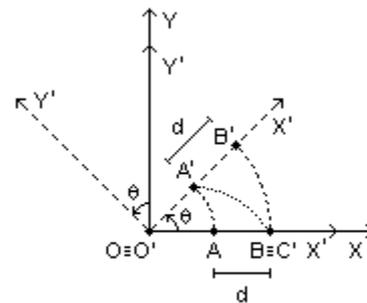


Fig.10

onde  $r'_A$  e  $r'_B$  representam as distâncias  $\overline{O'A'}$  e  $\overline{O'B'}$ , respectivamente, e  $a'$ , o módulo da aceleração ao longo da trajetória curvilínea entre os pontos  $B'$  e  $C'$ , e dirigida segundo o eixo  $Y'$ , mas com sentido contrário àquele escolhido como positivo para ele.

Comparando as expressões acima e usando  $v'_A = \omega r'_A$  e  $r'_B - r'_A = v'\Delta t$ , temos que  $a' = 2\omega v'$ . A aceleração  $\vec{a}'$ , cujo módulo é dado por esta fórmula, é perpendicular à direção da velocidade  $\vec{v}'$  e pode ser expressa de forma mais geral como:

$$\vec{a}' = 2\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

Esta é a aceleração de Coriolis e só aparece quando o movimento da partícula é observado em um referencial não inercial. E se a partícula tem massa  $m$ , existe uma força associada, a força de Coriolis:

$$\vec{F} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

Os efeitos da força de Coriolis podem ser observados no movimento dos ventos em volta dos centros da baixa pressão e na rotação do plano de oscilação de um pêndulo simples. Sob certas condições, uma dada região da atmosfera pode ter uma pressão abaixo da pressão atmosférica normal. O ar da vizinhança flui, então,

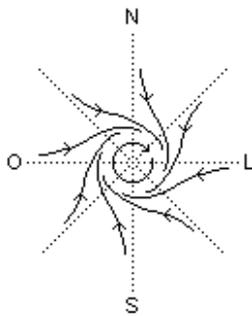
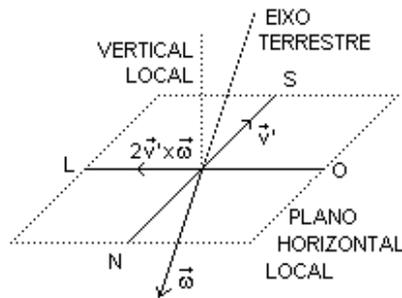


Fig.11(a)



(b)

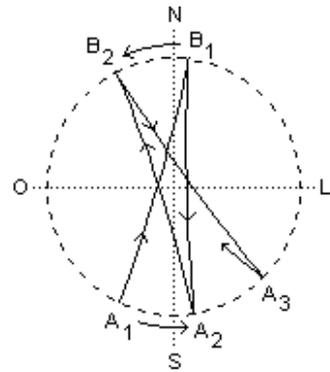


Fig.12

para esta região e as moléculas têm sua velocidade ao longo das linhas de fluxo desviadas para a esquerda, no Hemisfério Sul, por efeito da força de Coriolis. Com isso, formam-se redemoinhos com as massas de ar girando para a direita (Fig.11(a) e (b)). Do mesmo modo que as massas de ar são desviadas para a esquerda no Hemisfério Sul, a partícula que constitui um pêndulo simples também é desviada, de modo que o plano de oscilação gira em sentido anti-horário (Fig.12). O efeito da força de Coriolis sobre o plano de oscilação de um pêndulo simples foi demonstrado por Foucault em 1851, em Paris, com um pêndulo de 67 m de comprimento, cujo plano de oscilação girava pouco mais que  $11^\circ$  por hora. No Hemisfério Norte, os desvios devido à força de Coriolis têm sentidos contrários àqueles que ocorrem no Hemisfério Sul.

## II. MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Oscilar significa mover-se de um lado para outro, movimentar-se alternadamente em sentidos opostos, mover-se, tornando a passar (ao menos aproximadamente) pelas mesmas posições. Assim, uma partícula que se movimenta para a frente e para trás ao redor de um ponto dado está em um movimento oscilatório. Periódico significa que se repete com intervalos regulares. Assim, uma partícula que se movimenta de modo que, em intervalos de tempos iguais, o movimento se repete identicamente, está em um movimento periódico. Uma partícula que se movimenta para a frente e para trás, ao redor de um ponto fixo, e para a qual o movimento se repete identicamente em intervalos de tempo iguais, está em um movimento periódico oscilatório.

### II.1. MHS como Projeção do MCU

O movimento harmônico simples (MHS) é um tipo particular de movimento periódico oscilatório em que a partícula se move sobre uma reta de modo que a intensidade da força que tende a levá-la ao ponto fixo cresce na mesma proporção em que aumenta o seu afastamento deste mesmo ponto fixo. O movimento harmônico simples pode ser visto como a projeção ortogonal do movimento circular uniforme (MCU) sobre qualquer diâmetro (ou qualquer reta paralela a qualquer diâmetro) da circunferência que constitui a trajetória da partícula. Por exemplo (Fig.13), se uma partícula descreve um MCU num plano vertical, a sombra da partícula descreve um MHS sobre uma linha horizontal.

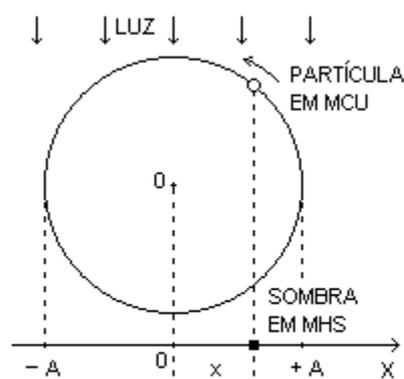


Fig.13

Por exemplo (Fig.13), se uma partícula descreve um MCU num plano vertical, a sombra da partícula descreve um MHS sobre uma linha horizontal.

### Elongação e Amplitude

A distância  $x$  (Fig.13), que vai da origem do eixo  $X$  até a posição da partícula, é chamada, no MHS, de elongação. Elongações no mesmo sentido do eixo  $X$  são consideradas positivas e elongações no sentido contrário, negativas. A distância  $A$ , que vai da origem do eixo  $X$  até o ponto de retorno associado à elongação máxima da partícula, é chamada de amplitude. Observe que a amplitude do MHS é igual ao raio da trajetória da partícula no MCU correspondente.

### Atividade

Para explorar a idéia do MHS como projeção ortogonal do MCU, desenhe uma circunferência de uns 8 cm de raio (Fig.14(a)), assinalando 16 pontos (0, 1, 2, 3, etc.) equidistantes sobre ela para representar posições de uma partícula em MCU.

Projete cada um desses 16 pontos sobre o diâmetro horizontal, por onde passa o eixo  $X$  (com origem no centro da circunferência).

Anote as correspondentes distâncias ( $x_0, x_1, x_2, x_3$ , etc.) das projeções à origem do eixo  $X$ , distâncias estas que representam elongações da partícula no MHS. Observe que a partir do quinto ponto os valores se repetem. Observe, ainda, que as elongações associadas aos pontos 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 são negativas porque têm sentidos contrários àquele convencionado como positivo para o eixo  $X$ .

A partícula em MCU percorre a distância entre dois pontos adjacentes num intervalo de tempo  $T/16$ , onde  $T$  representa o período do seu movimento. Neste

mesmo intervalo de tempo, o ângulo (em rad) varrido pela linha que vai do centro da

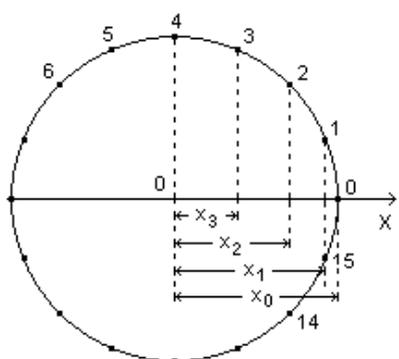
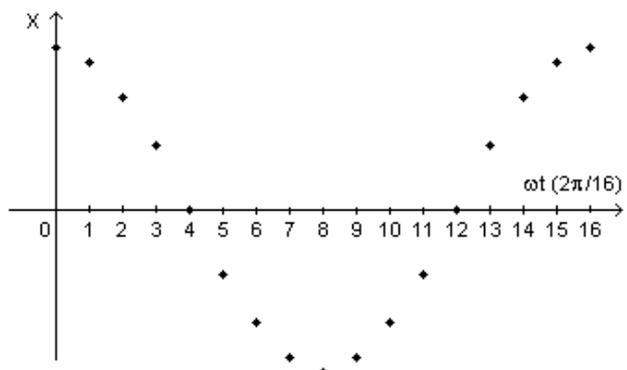


Fig.14(a)



(b)

circunferência até a partícula em MCU vale  $2\pi/16$ .

Com as elongações medidas, faça o gráfico da elongação da partícula em MHS em função do ângulo (em rad), tomando  $2\pi/16$  como unidade de ângulo (Fig.14(b)).

Observe que a Fig.14(b) representa o gráfico da elongação de uma partícula em MHS para um intervalo de tempo igual ao período do movimento. A partir daí, a forma do gráfico se repete periodicamente. Observe ainda que o gráfico obtido é o da função cosseno da trigonometria. Assim, a elongação de uma partícula em MHS é proporcional a  $\cos \omega t$ .

No contexto do MCU, a letra grega  $\omega$  representa o módulo da velocidade angular da partícula. No contexto do MHS, a mesma letra representa o que se chama de frequência angular, que se relaciona com a frequência  $f$  do movimento pela relação (que demonstraremos mais tarde)  $\omega = 2\pi f$ .

### Atividade

Continuando a explorar a idéia do MHS como projeção ortogonal do MCU, desenhe uma circunferência de uns 8 cm de raio, assinalando 16 pontos (0, 1, 2, 3,

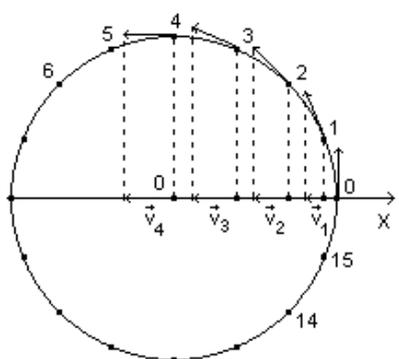
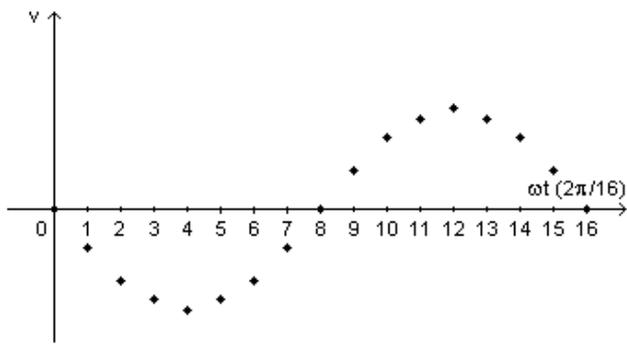


Fig.15(a)



(b)

etc.) equidistantes sobre ela para representar posições de uma partícula em MCU.

Nesses pontos, desenhe flechas de uns 3 cm de comprimento para representar os correspondentes vetores velocidades lineares da partícula. Todas as flechas devem

ser do mesmo tamanho e tangentes à circunferência nos pontos considerados (Fig.15(a)).

Projete ortogonalmente cada uma das 16 flechas sobre o diâmetro horizontal, por onde passa o eixo X (com origem no centro da circunferência).

Anote os comprimentos das projeções, que representam os módulos ( $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \text{etc.}$ ) das respectivas velocidades da partícula em MHS. Observe que a partir do quinto ponto os valores se repetem. Observe, ainda, que as projeções associadas aos pontos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são negativas porque têm sentidos contrários àquele convencionalizado como positivo para o eixo X.

Com os comprimentos medidos, desenhe o gráfico da velocidade da partícula em MHS em função do ângulo (em rad), tomando  $2\pi/16$  como unidade de ângulo (Fig.15(b), onde se representa cada comprimento em dobro para melhor visualização).

Observe que a Fig.15(b) representa o gráfico da velocidade de uma partícula em MHS para um intervalo de tempo igual ao período do movimento. A partir daí, a forma do gráfico se repete periodicamente. Observe ainda que o gráfico obtido é o da função seno da trigonometria com o sinal negativo. Assim, a velocidade instantânea de uma partícula em MHS é proporcional a  $-\text{sen } \omega t$ .

### Atividade

Explorando mais uma vez a idéia do MHS como projeção ortogonal do MCU, desenhe uma circunferência de uns 8 cm de raio, assinalando 16 pontos (0, 1, 2, 3, etc.) equidistantes sobre ela para representar posições de uma partícula em MCU.

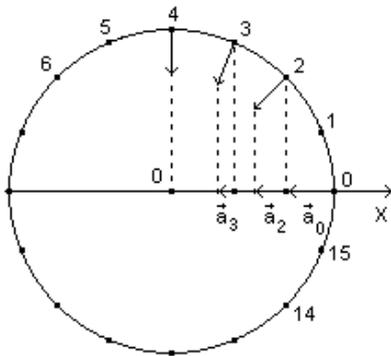
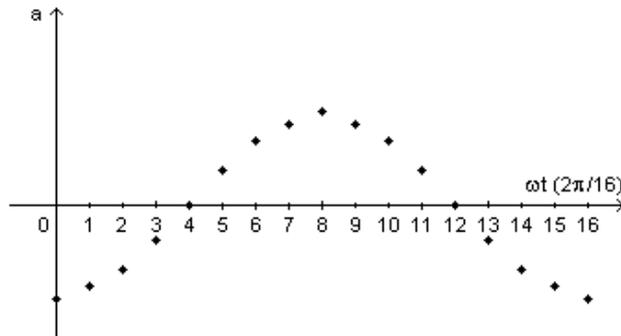


Fig.16(a)



(b)

Nesses pontos, desenhe flechas de uns 3 cm de comprimento para representar os correspondentes vetores acelerações centrípetas da partícula. Todas as flechas devem ser do mesmo tamanho e dirigidas para o centro da circunferência (Fig.16(a)).

Projete ortogonalmente cada uma das 16 flechas sobre o diâmetro horizontal, por onde passa o eixo X (com origem no centro da circunferência).

Anote os comprimentos das projeções, que representam os módulos ( $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \text{etc.}$ ) das respectivas acelerações da partícula em MHS. Observe que a partir do quinto ponto os valores se repetem. Observe, ainda, que as projeções associadas aos pontos 0, 1, 2, 3, 13, 14 e 15 são negativas porque têm sentidos contrários àquele convencionalizado como positivo para o eixo X.

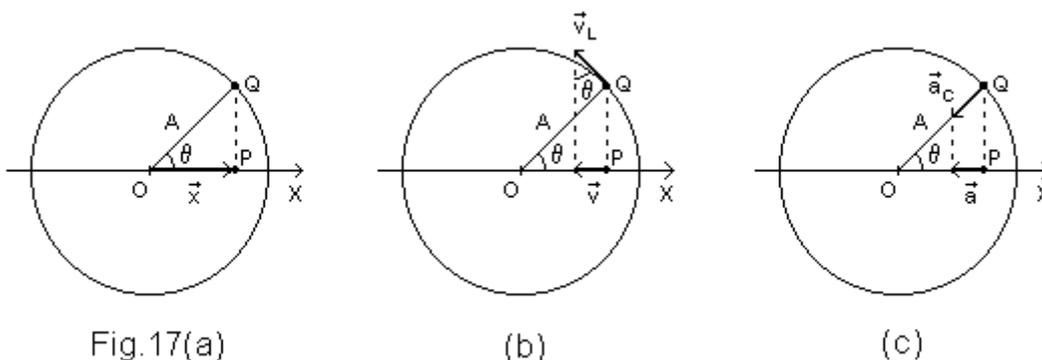
Com os comprimentos medidos, desenhe o gráfico da aceleração da partícula em MHS em função do ângulo (em radianos), tomando  $2\pi/16$  como unidade de ângulo (Fig.16(b), onde se representa cada comprimento em dobro para melhor visualização).

Observe que a Fig.16(b) representa o gráfico da aceleração de uma partícula em MHS para um intervalo de tempo igual ao período do movimento. A partir daí, a forma do gráfico se repete periodicamente. Observe ainda que o gráfico obtido é o da função cosseno da trigonometria com o sinal negativo. Assim, a aceleração instantânea de uma partícula em MHS é proporcional a  $-\cos \omega t$ .

## II.2. Relações Matemáticas

A partir das três atividades desenvolvidas acima, baseadas na idéia do movimento harmônico simples como uma projeção ortogonal de um movimento circular uniforme sobre qualquer diâmetro (ou qualquer reta paralela a qualquer diâmetro) da circunferência que constitui a trajetória da partícula, podemos concluir que  $x(t) \sim \cos \omega t$ ,  $v(t) \sim -\sin \omega t$  e  $a(t) \sim -\cos \omega t$ , onde o símbolo  $\sim$  significa proporcionalidade. Para a descrição completa do fenômeno precisamos completar as expressões acima de modo a ter igualdades matemáticas.

Assim, vamos agora formalizar matematicamente esta idéia do movimento harmônico simples como a projeção ortogonal de um movimento circular uniforme sobre qualquer diâmetro (ou qualquer reta paralela a qualquer diâmetro) da circunferência que constitui a trajetória da partícula.



Se os pontos P e Q (Fig.17(a)) coincidem em  $t = 0$ , o ângulo do segmento OQ com o eixo X no instante posterior  $t$  é  $\theta = \omega t$ , onde  $\omega$  representa o módulo da velocidade angular do MCU. Então,  $\cos \omega t = x/A$  ou:

$$x(t) = A \cos \omega t$$

onde  $x$  é a elongação,  $\omega$ , a frequência angular<sup>2</sup> e  $A$ , a amplitude (elongação máxima) da partícula em MHS.

O módulo da velocidade linear do ponto Q em MCU é  $v_L = A\omega$  e o módulo da velocidade do ponto P em MHS (Fig.17(b)) é:

$$v(t) = -v_L \sin \omega t$$

ou:

$$v(t) = -A\omega \sin \omega t$$

<sup>2</sup> Lembramos novamente que no MCU, a letra grega  $\omega$  simboliza o módulo da velocidade angular da partícula enquanto que no MHS, a mesma letra simboliza a frequência angular, que se relaciona à frequência propriamente dita, simbolizada pela letra  $f$ , pela expressão  $\omega = 2\pi f$ .

O sinal negativo se justifica da seguinte maneira. Para  $0 < \omega t < \pi$ ,  $\text{sen } \omega t > 0$ , e o vetor velocidade tem o sentido oposto àquele escolhido para o eixo X. Para  $\pi < \omega t < 2\pi$ ,  $\text{sen } \omega t < 0$ , e o vetor velocidade tem o mesmo sentido daquele escolhido para o eixo X. Assim, para qualquer ângulo  $\omega t$ , ou seja, em qualquer instante de tempo considerado, a função  $\text{sen } \omega t$  tem o sinal contrário ao da velocidade.

O módulo da aceleração centrípeta do ponto Q em MCU é dada por  $a_c = v_L^2/A = A\omega^2$  e o módulo da aceleração do ponto P em MHS (Fig.17(c)) fica:

$$a(t) = -a_c \cos \omega t$$

ou

$$a(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$$

O sinal negativo introduzido se justifica de modo análogo ao da velocidade.

As expressões matemáticas deduzidas valem para o caso em que os pontos Q e P coincidem em  $t = 0$ , ou seja, valem para o caso em que  $x(t = 0) = A$ . Em outras palavras, as expressões valem para o caso particular em que a partícula começa a ser observada quando ( $t = 0$ ) se encontra no ponto correspondente à elongação máxima ( $x = A$ ). O caso mais geral, em que a partícula está em uma posição genérica quando começa a ser observada, pode ser descrito escrevendo-se:

$$x(t) = A \cos[\omega t + \delta]$$

$$v(t) = -A\omega \text{sen}[\omega t + \delta]$$

e

$$a(t) = -A\omega^2 \cos[\omega t + \delta]$$

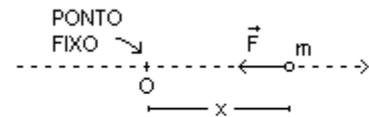


Fig.18

onde  $\delta$ , a fase inicial, é tal que  $x(t = 0) = A \cos \delta$ , ou seja, dá conta de a elongação inicial [ $x(t = 0)$ ] ser diferente da elongação máxima ( $A$ ).

### II.3. Definição de MHS

Para uma definição de MHS independente do MCU devemos observar que, das expressões deduzidas acima para a elongação e para o módulo da aceleração, vem que  $a = -\omega^2 x$ . Multiplicando os dois lados da igualdade pela massa  $m$  da partícula e levando em conta a segunda lei de Newton, obtemos:

$$F = -Cx \quad \text{com} \quad C = m\omega^2$$

Aqui,  $F$  representa o módulo da força resultante sobre a partícula. Assim (Fig.18), uma partícula está em MHS quando se move sobre uma reta sob o efeito de uma força cujo módulo é proporcional ao afastamento da partícula de um ponto fixo sobre esta reta e dirigida para esse ponto. Uma força que, atuando sobre uma partícula, tem a propriedade de estar sempre dirigida a um certo ponto fixo, é chamada de força restauradora. A força que governa o MHS é uma força restauradora cujo módulo é proporcional ao afastamento da partícula do ponto fixo considerado.

#### Período e Frequência

Período é o intervalo de tempo levado pela partícula para completar uma oscilação. Assim, simbolizando o período por  $T$ , da definição de período temos:

$$x(t) = x(t + T)$$

ou seja,  $A \cos \omega t = A \cos[\omega(t + T)]$ . Como  $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$ , temos  $\omega T = 2\pi$  ou:

$$T = 2\pi / \omega$$

Aqui aparece uma das características mais importantes de qualquer oscilador harmônico: o período de oscilação não depende da amplitude. Assim, tanto para pequenas quanto para grandes amplitudes, o período de um dado oscilador harmônico permanece o mesmo. Esta independência do período para com a amplitude torna qualquer oscilador harmônico ideal para servir de base na construção de relógios já que o ritmo de andamento dos ponteiros não se altera por pequenas mudanças acidentais na correspondente amplitude de vibração. Por isso, praticamente todos os relógios modernos estão baseados em um tipo ou outro de oscilador harmônico.

Freqüência é o número de oscilações realizadas por unidade de tempo. Então, simbolizando a freqüência por  $f$ , temos:

$$f = 1/T \quad \text{ou} \quad f = \omega / 2\pi$$

#### II.4. Pêndulo Simples

O pêndulo simples consiste de uma partícula de massa  $m$  suspensa por um fio sem massa e inextensível de comprimento  $L$ . Afastada da posição de equilíbrio, sobre a linha vertical que passa pelo ponto de suspensão, e abandonada, a partícula oscila. Para pequenas amplitudes, a partícula descreve um MHS.

Ignorando a resistência do ar, as forças que atuam sobre a partícula são a força peso, exercida pela Terra, e a tensão, exercida pelo fio (Fig.19). Como o fio é inextensível, a componente do peso ao longo do fio cancela a força de tensão. A resultante das forças que atuam sobre a partícula é, portanto, a componente do peso na direção do movimento da partícula, cujo módulo vale  $mg \sin \theta$ .

A partícula do pêndulo descreve um arco de circunferência. Mas, se a amplitude do movimento é muito menor que o comprimento do fio, ou seja, se o ângulo  $\theta$  é pequeno, podemos aproximar o arco por um segmento de reta horizontal sobre o qual fixamos o eixo  $X$ , com origem  $O$  onde a vertical tirada do ponto de suspensão corta esse eixo. Então, fazendo  $\sin \theta \approx x/L$ , o módulo da força resultante sobre a partícula fica:

$$F(x) \approx -(mg/L) x$$

O sinal negativo aparece porque a força resultante aponta na mesma direção que aquela escolhida como positiva para o eixo  $X$  quando a elongação é negativa e na direção oposta quanto a elongação é positiva.

Assim, se o movimento da partícula se restringir a pequenas amplitudes, podemos considerar que ele acontece sobre uma reta (o eixo  $X$ ) e sob o efeito de uma

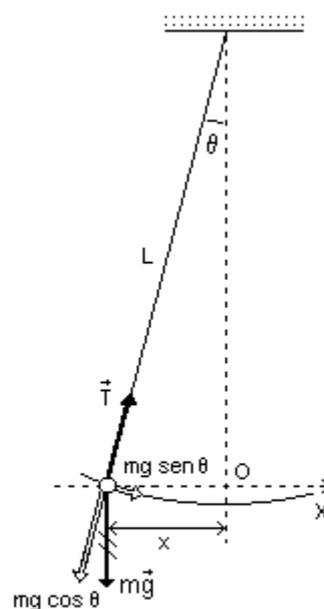


Fig.19

força cujo módulo é proporcional ao afastamento da partícula de um ponto fixo sobre esta reta (o ponto O) e dirigida para esse ponto. Em outras palavras, para pequenas amplitudes, o movimento da partícula que faz parte do pêndulo é um MHS.

Por outro lado, o módulo da força que atua sobre a partícula em MHS é dado genericamente por  $F = -Cx$  com  $C = m\omega^2$ , de modo que o período fica dado pela fórmula  $T = 2\pi/\omega$ . Comparando esta expressão para a força com aquela obtida para o pêndulo simples, temos  $C = mg/L$  e daí,  $\omega^2 = g/L$  e:

$$T = 2\pi \sqrt{L/g}$$

Como já dissemos, uma das características importantes de qualquer oscilador harmônico é que o período de oscilação não depende da amplitude do movimento. Aqui reaparece esta característica uma vez que a partícula do pêndulo simples descreve um MHS para pequenas amplitudes. Neste contexto, esta característica constitui o que se chama de lei do isocronismo.

No caso de amplitudes não muito pequenas, o pêndulo se torna um oscilador não harmônico, a força restauradora não é mais proporcional ao deslocamento medido a partir da posição de equilíbrio e o período passa a depender da amplitude.

Quando a amplitude é muito menor que o comprimento do fio, o período do pêndulo simples independe da amplitude do movimento porque a força de restituição que atua sobre a partícula pode ser considerada proporcional a  $\theta$ , o ângulo entre o fio e a vertical. No caso em que a amplitude não é tão pequena, deve-se levar em conta que a força de restituição não é proporcional a  $\theta$ , mas a  $\text{sen } \theta$ . E como  $\text{sen } \theta < \theta$  (se  $\theta \neq 0$ ), a força de restituição, nesse caso, é menor do que no caso anterior, qualquer que seja a posição da partícula e, portanto, também a sua aceleração é menor. Assim, a partícula demora mais tempo para completar uma oscilação e o período é maior.

### Observação

Escrever  $\text{sen } \theta \approx x/L$  significa tomar, implicitamente,  $\text{sen } \theta \approx \theta$ . Esse resultado é verdadeiro para  $\theta$  pequeno e em radianos. Para entender o porquê dos radianos deve-se considerar que, por definição, o ângulo entre dois segmentos de reta é dado em radianos pelo seguinte procedimento. Com centro no ponto de cruzamento dos segmentos de reta, traça-se um arco de circunferência entre esses segmentos com raio R qualquer. Então, medindo-se o comprimento S do arco, o ângulo procurado é definido por  $\theta = S/R$ . Assim, voltando ao pêndulo simples, para ângulos pequenos, o arco de circunferência que representa a trajetória da partícula se confunde com o segmento de reta de comprimento x (Fig. 19) e podemos escrever, pela definição de ângulo em radianos,  $\theta \approx x/L$ . Assim,  $\text{sen } \theta \approx \theta \approx x/L$ , que é a expressão usada.

$\theta$ (graus)	$\theta$ (rad)	$\text{sen } \theta$	$[\theta - \text{sen } \theta]/\text{sen } \theta$ (em %)
10	0,175	0,174	0,575
15	0,262	0,259	1,158
20	0,349	0,342	2,047
25	0,436	0,423	3,073
30	0,524	0,500	4,800
35	0,611	0,574	6,446

Por outro lado, escrevendo  $\theta \approx x/L$  estamos aproximando o arco de circunferência que constitui a trajetória da partícula por um segmento de reta. Este procedimento é tão mais exato quanto menor for a amplitude do movimento da

partícula. Em termos matemáticos, aproximar o arco pelo segmento de reta significa tomar o seno do ângulo entre o fio e a vertical como o próprio ângulo (em radianos). A tabela acima dá uma idéia do erro relativo cometido nesse procedimento.

### Atividade

Com o uso de um pêndulo simples podemos determinar o valor da aceleração gravitacional local. Tomando um pêndulo simples de 1 m de comprimento, por exemplo, e medindo o tempo  $\Delta t$  levado para que ele complete 10 oscilações, temos:

$$g = L(2\pi/T)^2 = (1\text{m})(20\pi/\Delta t)^2 \approx 3.948\text{m}/(\Delta t)^2$$

e se  $\Delta t = 20$  s, por exemplo, vem:

$$g \approx 3.948\text{m}/(20\text{s})^2 \approx 9,87\text{m/s}^2$$

Um modo de aumentar a precisão do experimento é aumentar o número de oscilações para a medida do tempo  $\Delta t$ , de modo que qualquer imprecisão nesta medida tem seu efeito no cálculo de  $g$  reduzido na mesma proporção. Para poder aumentar o número de oscilações, a resistência do ar deve ser minimizada, já que tende a reduzir a amplitude das oscilações. Um modo de reduzir o efeito da resistência do ar é reduzir o volume do corpo que vai constituir o pêndulo sem reduzir, na mesma proporção, a sua inércia. Assim, uma pequena esfera de aço ou de chumbo se torna bastante adequada. De qualquer modo, como o período de oscilação é independente da amplitude, esse efeito da resistência do ar não influencia no resultado final e limita, apenas, o número de oscilações que pode ser tomado na medida de  $\Delta t$ .

### Massa Gravitacional e Massa Inercial

Considerando pequenas amplitudes de movimento, a partícula que faz parte de um pêndulo simples descreve um MHS não usual porque o período do movimento não depende da massa da partícula. Assim, aumentando a massa da partícula, por um lado a sua inércia aumenta, com o efeito de tornar maior o período do movimento, e por outro lado o seu peso aumenta, ou seja, aumenta a intensidade da força restauradora, com o efeito de tornar menor o período do movimento. O período do movimento não se altera porque estes dois efeitos se cancelam exatamente. Em outras palavras, o cancelamento dos dois efeitos referidos acima ocorre porque a massa da partícula que aparece na expressão do seu peso é igual à massa que aparece na expressão da segunda lei de Newton. Assim, a palavra massa está associada, na Física, a dois fenômenos a primeira vista totalmente diferentes.

Pela primeira lei de Newton, se é nula a força resultante sobre um corpo, os únicos estados de movimento possíveis para ele são aqueles de velocidade constante (inclusive nula). A mudança de um estado para outro, com velocidade diferente, só é possível se sobre o corpo age uma força resultante não nula. Daí, pela segunda lei de Newton, a velocidade do corpo varia tanto mais rapidamente quanto menor for a sua massa. A palavra massa aparece, aqui, associada à inércia do corpo e é chamada massa inercial. Por outro lado, tomando dois corpos quaisquer 1 e 2, esféricos e com distribuições homogêneas de massa, a lei da gravitação universal de Newton afirma que os módulos  $F_{12}$  e  $F_{21}$ , da força com que o corpo 1 atrai o corpo 2 e da força com que o corpo 2 atrai o corpo 1, são dados por:

$$F_{12} = F_{21} = Gm_1m_2/r^2$$

onde  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  é a constante da gravitação universal (a mesma para todos os corpos),  $m_1$  e  $m_2$  representam as massas dos corpos 1 e 2 e  $r$ , a distância entre os seus centros. Aqui, a palavra massa aparece associada a uma propriedade dos corpos que lhes permite interagir gravitacionalmente entre si e é chamada massa gravitacional.

Se a distinção entre massa gravitacional ( $m_G$ ) e massa inercial ( $m_{IN}$ ) tivesse sido feita desde o início da demonstração da fórmula do período do MHS associado à partícula que faz parte de um pêndulo simples, teríamos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{IN}L}{m_G g}}$$

Baseado nesta expressão, Newton idealizou o seguinte experimento para detectar qualquer diferença entre os dois tipos de massa. Tomando como pingente de um pêndulo uma cápsula delgada e colocando dentro dela corpos de diferentes substâncias, cuidando para que o peso total fosse sempre o mesmo, para poder garantir que a massa gravitacional era sempre a mesma, Newton mediu o período das oscilações para cada caso. Assim, qualquer diferença no período das oscilações teria que ser atribuída a uma diferença na massa inercial. Em todos os casos experimentados, os períodos medidos por Newton tiveram o mesmo valor, que era aquele dado pela fórmula onde não aparecem as massas. Assim, Newton verificou experimentalmente, com a precisão possível na sua época, que  $m_G = m_{IN}$ .

Depois de Newton, a precisão dos experimentos aumentou muito e, mesmo assim, não foi detectada nenhuma diferença entre o valor dos dois tipos de massa. Atualmente, com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, esta igualdade foi elevada à condição de princípio fundamental e não se justifica mais a distinção entre massa inercial e gravitacional.

### Frequência Própria

Como  $f = 1/T$ , a frequência do movimento de um pêndulo simples é:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/L}$$

Dado  $L$ , o comprimento do pêndulo, e  $g$ , o módulo da aceleração gravitacional local, e caso não seja forçado por qualquer outro agente externo além da força gravitacional, o pêndulo só pode oscilar com a frequência dada pela fórmula acima. Esta frequência característica do pêndulo é chamada frequência própria (ou natural) de oscilação.

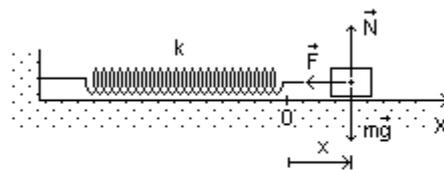


Fig.20

### II.5. Sistema Corpo-Mola

Um corpo de massa  $m$  se apoia sobre uma superfície horizontal sem atrito e está preso a uma mola (de massa desprezível) de constante elástica  $k$  (Fig.20). Se o corpo é abandonado com a mola esticada ou comprimida, ele passa a se mover horizontalmente sob o efeito da força de restituição da mola, executando um MHS.

Sobre o corpo existem três forças: a força peso, a força normal e a força da mola. Como as forças peso e normal cancelam-se mutuamente, a força resultante sobre o corpo é a própria força que a mola exerce sobre ele. O módulo dessa força é:

$$F = -kx$$

onde  $x$  representa a elongação da mola, ou seja, o quanto ela foi esticada ou comprimida além do seu comprimento de equilíbrio e  $k$ , chamada constante elástica da mola, representa a dureza da mola. Pela lei de Hooke,  $k$  é constante. Comparando esta expressão com a expressão genérica do módulo da força que atua sobre a partícula em MHS,  $F = -Cx$  com  $C = m\omega^2$ , temos  $k = m\omega^2$ . E como  $T = 2\pi/\omega$ , temos, para o período do MHS descrito pelo corpo ligado à mola:

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}$$

Logo, quanto maior a massa da partícula, maior o período. E quanto mais dura a mola, menor o período. Estas mesmas conclusões podem ser estabelecidas levando em conta que o módulo da força exercida pela mola sobre o corpo depende da elongação da mola e de sua constante elástica. Assim, se o corpo é substituído por outro, de massa maior, mantendo-se a mesma elongação da mola, a força sobre o segundo corpo será a mesma que aquela sobre o primeiro, mas, pela segunda lei de Newton, a aceleração instantânea do segundo corpo será menor do que a aceleração instantânea do primeiro. E isso é verdade para qualquer elongação da mola. Portanto, como a amplitude do movimento é a mesma nos dois casos, o corpo de massa maior, tendo sempre aceleração instantânea menor, levará mais tempo para descrever uma oscilação completa, ou seja, terá período maior. Por outro lado, se a mola é substituída por outra, de constante elástica maior, mantendo-se o mesmo corpo e a mesma elongação da mola, a força sobre o corpo será maior e, pela segunda lei de Newton, a sua aceleração instantânea será, também, maior do que antes. E isso é verdade para qualquer elongação da mola. Assim, como a amplitude do movimento é a mesma nos dois casos, o corpo ligado à mola de constante elástica maior, tendo sempre aceleração instantânea maior, levará menos tempo para descrever uma oscilação completa e, portanto, terá período menor.

### **Frequência Própria**

Como  $f = 1/T$ , a frequência do movimento do corpo preso à mola é:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$$

Dada a massa  $m$  do corpo e  $k$ , a constante elástica da mola, e caso o corpo não seja forçado por qualquer outro agente externo além da força da mola, o corpo em questão só pode oscilar com a frequência dada pela fórmula acima. Esta é a frequência própria (ou natural) de oscilação do sistema corpo-mola.

### **Elasticidade**

Um objeto sujeito a forças externas pode sofrer variações de tamanho e/ou de forma. Estas variações estão relacionadas, em última análise, com as interações entre os átomos que constituem o corpo. Um corpo suspenso por uma mola faz aumentar o

comprimento da mola. O aumento de comprimento da mola é proporcional ao módulo do peso do corpo suspenso e quando o corpo é retirado, a mola recupera o seu comprimento original, desde que não tenha sido deformada permanentemente por excesso de carga. Do mesmo modo, uma bola de futebol sofre uma deformação ao ser chutada, readquirindo sua forma original após o chute, desde que não tenha sido danificada pela violência do chute. E, ainda, uma régua presa por uma de suas extremidades a borda de uma mesa e entortada, volta a sua forma original quando cessa a força que a entortou, desde que não tenha sido muito intensa a força.

A mola, a bola e a régua são exemplos de corpos elásticos. Elasticidade é a propriedade de um corpo pela qual ele readquire a sua forma original quando desaparecem as causas de sua deformação.

### Atividade

Segundo a lei de Hooke, uma mola, sofrendo uma alongação que aumente ou diminua o seu comprimento de equilíbrio, tende a voltar ao seu comprimento original exercendo uma força de intensidade proporcional à deformação:  $F = -kx$ , onde  $k$  é uma constante e  $x$ , a medida da alongação a partir do comprimento de equilíbrio. O sinal negativo indica que a força tem sentido contrário ao da alongação.

Para determinar o valor da constante elástica de uma mola através da lei de Hooke suspenda com a mola corpos de massas diferentes e, para cada um deles, anote a alongação correspondente. Use a tabela abaixo.

Identifique a força que deforma a mola. Dica: não é a força peso do corpo suspenso.

Considerando uma mola de massa não desprezível suspensa na vertical, discuta por que ela se alonga mais na porção superior do que na porção inferior.

Calcule o módulo do peso de cada corpo usando  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

massa (kg)	peso (N)	alongação (m)
0,01		
0,02		
0,03		
0,04		
0,05		
0,06		

Discuta a forma esperada para o gráfico da força pela alongação.

Em uma folha de papel milimetrado, faça o gráfico da força pela alongação.

Determine a constante de elasticidade da mola pela declividade da reta.

### Observação

Com a fórmula dada para o período de oscilação de um corpo preso a uma mola na horizontal pode-se determinar a constante elástica dessa mola. Para que não exista atrito no sistema pode-se usar um colchão de ar entre o corpo e o plano horizontal. Então, pode-se determinar a massa do corpo com uma balança e medir o intervalo de tempo levado pelo corpo para completar, por exemplo, 10 oscilações, calculando o período do movimento dividindo-se tal intervalo de tempo por 10. Este procedimento diminui a influência do tempo de reação do observador sobre os resultados do experimento. Quanto maior o número de oscilações tomado, menor será tal influência. Com o período do movimento e a massa da mola, calcula-se a constante elástica da mola pela fórmula  $k = m (2\pi/T)^2$ . Aqui é importante observar que se, no

caso do pêndulo simples, a fórmula obtida para o período de oscilação é aproximada, sendo tanto mais exata quanto menor a amplitude do movimento, para o sistema corpo-mola, a fórmula do período é exata para qualquer amplitude, desde que a força que a mola exerce sobre o corpo em questão seja dada pela lei de Hooke. Assim, ao se colocar o sistema em oscilação, deve-se ter o cuidado de tomar uma amplitude pequena não para aumentar a exatidão da fórmula do período, mas para garantir que a mola não sofra uma deformação permanente e que a lei de Hooke continue válida.

## II.6. Energia no MHS

Para estudar a energia do oscilador harmônico vamos tomar como exemplo o sistema corpo-mola. A energia cinética do sistema está no corpo de massa  $m$ . A mola não tem energia cinética porque é uma mola ideal, isto é, além de obedecer a lei de Hooke, tem massa nula. Por outro lado, tomando o nível de referência para a energia potencial gravitacional na altura do centro de gravidade do corpo de massa  $m$ , a energia potencial gravitacional do sistema é nula. Mas existe uma energia potencial elástica, associada e localizada na mola. Levando em conta que a energia potencial elástica é dada por  $E_p = \frac{1}{2} kx^2$  e que, para um oscilador harmônico,  $x(t) = A \cos \omega t$ , temos:

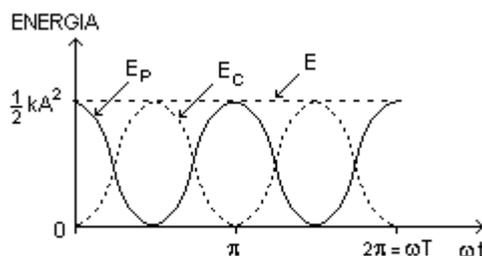


Fig.21

$$E_p = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega t$$

e levando em conta que  $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ , que, para um oscilador harmônico,  $v(t) = -A\omega \sin \omega t$ , e que para o sistema corpo-mola  $k = m\omega^2$ , temos:

$$E_c = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t$$

E como  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ , a energia (mecânica) total do sistema corpo-mola,  $E = E_p + E_c$ , fica:

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

Observe que a energia total não depende do tempo, ou seja, é constante. A Fig.21 mostra os gráficos de  $E_p$ ,  $E_c$  e  $E$  em função de  $\omega t$ , para um intervalo de tempo correspondente a um período do movimento. A partir daí, os gráficos se repetem periodicamente.

A Fig.22 mostra algumas configurações do sistema. As linhas verticais são para referência: linha 1, mola comprimida e corpo parado, linha 2, mola com seu comprimento de equilíbrio e corpo com velocidade máxima e linha 3, mola distendida e corpo parado. As flechas indicam o módulo e o sentido da velocidade nas configurações correspondentes.

Em  $t = 0$ , (Fig.22, configuração A) o sistema se encontra na configuração correspondente a mola comprimida com uma elongação  $x = -A$  e o corpo parado:

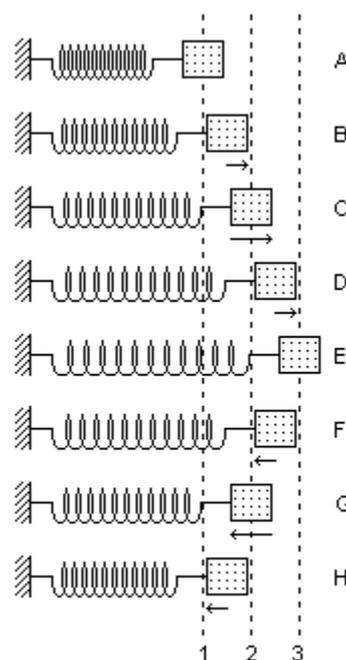


Fig.22

$$E = E_p = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{e} \quad E_c = 0$$

Então (Fig.22, configuração B), o corpo é acelerado pela força que a mola exerce sobre ele, a energia potencial da mola diminui enquanto que a energia cinética do corpo aumenta. Em  $t = \pi/2\omega$  (Fig.22, configuração C), o sistema alcança a configuração em que a mola tem elongação nula e a velocidade do corpo é máxima:

$$E_p = 0 \quad \text{e} \quad E = E_c = \frac{1}{2}kA^2$$

Então (Fig.22, configuração D), o corpo é desacelerado pela força que a mola exerce sobre ele, sua energia cinética diminui enquanto que a energia potencial da mola aumenta. Em  $t = \pi/\omega$  (Fig.22, configuração E), o sistema alcança a configuração em que a elongação da mola vale  $x = A$  e o corpo está parado:

$$E = E_p = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{e} \quad E_c = 0$$

De  $t = \pi/\omega$  até  $t = 2\pi/\omega = T$  (Fig.22, configurações F, G, H e A), o movimento se repete com o corpo se deslocando em sentido contrário. Em  $t = 2\pi/\omega = T$ , o sistema alcança a mesma configuração que em  $t = 0$ . Daí por diante, o movimento se repete periódica e indefinidamente.

Se existe atrito no sistema, uma parte da energia total é dissipada a cada oscilação e o movimento do corpo é amortecido. Para que o movimento não seja amortecido, isto é, para que a energia mecânica seja constante, deve então existir uma fonte externa que forneça energia para o sistema.

Para o pêndulo simples, a discussão é completamente análoga e, escolhendo-se o nível de referência para a energia potencial gravitacional na altura em que se encontra a partícula que faz parte do pêndulo simples quando este se encontra na vertical, a discussão se torna idêntica. Assim, por exemplo, na configuração em que  $x = -A$ , a energia cinética da partícula é nula e a energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra é máxima e igual a energia total, na configuração em que  $x = 0$ , a energia cinética da partícula é máxima e igual a energia total e a energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra é nula e configuração em que  $x = A$ , a energia cinética da partícula é nula e a energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra é máxima e igual a energia total. Nas configurações intermediárias, a partícula está acelerada ou desacelerada, conforme o caso, tendo então energia cinética não nula e diferente da energia total, de modo que o sistema partícula-Terra tem certa energia potencial também não nula.

No sistema corpo-mola, a energia cinética, quando existe, está localizada no corpo, e a energia potencial (elástica), quando existe, está localizada na mola. No pêndulo simples, a energia cinética, quando existe, está localizada na partícula que faz parte do pêndulo, mas a energia potencial está distribuída entre as partes que constituem o sistema partícula-Terra, já que depende da massa da partícula, da massa da Terra e da distância relativa entre elas.

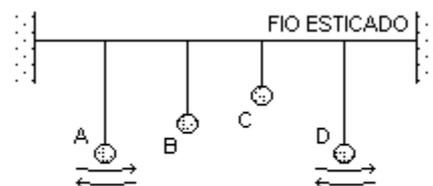


Fig.23

## II.7. Ressonância

Consideremos os pêndulos A, B, C e D (Fig.23), constituídos por partículas de mesma massa, os três primeiros de comprimentos diferentes e o quarto, com comprimento igual ao primeiro, todos suspensos em um fio elástico esticado.

Fazendo oscilar o pêndulo A com certa amplitude  $A^*$ , observa-se que os outros, que estavam parados, começam a oscilar também. Os pêndulos B e C, nem bem começam a oscilar, param novamente. O pêndulo D, ao contrário, com o passar do tempo oscila com uma amplitude cada vez maior enquanto que o pêndulo A oscila com uma amplitude cada vez menor. Quando a amplitude do pêndulo D chega a um valor máximo próximo de  $A^*$ , o pêndulo A fica imóvel. Então, os movimentos se repetem, com os pêndulos A e D trocando seus papéis. E assim, sucessivamente, até que a energia inicial associada ao movimento tenha sido dissipada. O fio esticado atua como intermediário na troca de energia entre os pêndulos.

No experimento descrito acima, o pêndulo A, oscilando com sua frequência própria, força o fio esticado a oscilar com a mesma frequência. Dizemos que o fio esticado entra em vibração forçada. Então, o fio esticado força os pêndulos B, C e D a oscilar na mesma frequência do pêndulo A já que esta é, agora, também a frequência do fio. Como o fio não pode oscilar com uma frequência diferente de qualquer uma de suas frequências próprias, ele termina por parar. O mesmo acontece com os pêndulos B e C. Os pêndulos A e D são idênticos e, por isso, têm frequências próprias iguais. O pêndulo D, portanto, é forçado a oscilar com uma frequência igual a sua frequência própria e pode absorver toda a energia disponível, aumentando sua amplitude de oscilação. Com o passar do tempo, os movimentos se repetem com os papéis dos pêndulos A e D trocados e, assim, sucessivamente.

Quando a frequência com que um agente externo perturba um corpo é igual a frequência própria (ou uma das frequências próprias) de vibração ou de oscilação do corpo, este passa a oscilar com amplitude cada vez maior. Este fenômeno é o que se chama de ressonância. Se o agente externo perturba continuamente o corpo com o qual está em ressonância, a amplitude das vibrações ou oscilações pode ficar extraordinariamente grande a ponto de destruir o corpo, desde que as forças de resistência ou de dissipação sejam pequenas. Além disso, o fluxo de energia do agente externo para o corpo é máximo quando eles estão em ressonância. No exemplo acima, os pêndulos A e D estão em ressonância.

Um exemplo de ressonância mais ligado ao cotidiano é aquele de uma criança andando de balanço. Ao andar de balanço, a criança encolhe as pernas quando ela e o balanço se movem para trás e estica-as, quando ela e o balanço se movem para a frente. Se a frequência do movimento das pernas da criança é igual a frequência própria do pêndulo constituído por ela e o balanço, a amplitude das oscilações aumente cada vez mais.

### III. ONDAS MECÂNICAS HARMÔNICAS

Consideremos um certo sistema físico e uma propriedade deste sistema, como uma mola e sua deformação, uma corda e o deslocamento transversal de cada um de seus pontos, uma certa quantidade de ar e sua pressão ou um campo eletromagnético numa certa extensão do espaço e as intensidades das componentes elétrica e magnética, etc. Conforme a natureza do sistema, uma mudança na propriedade em questão em uma certa parte do sistema pode se propagar para outras partes e falamos em uma onda associada a esta propriedade. Os aspectos mais importantes das ondas são a sua velocidade de propagação e a frequência e as modificações que sofrem quando variam as propriedades físicas do meio por onde se propagam (nos fenômenos de reflexão, refração e polarização), quando encontram obstáculos (nos fenômenos de difração e espalhamento) ou quando mais de uma onda se propaga na mesma região do espaço (no fenômeno de interferência). Estudaremos principalmente as ondas mecânicas em meios elásticos, embora os fenômenos mencionados acima sejam comuns a todos os tipos de onda.

A propagação de ondas mecânicas progressivas em um meio elástico está relacionada à transmissão de energia de um ponto a outro desse meio. Por exemplo, quando um gota cai sobre a superfície plana da água, produz uma perturbação que se propaga afastando-se cada vez mais do ponto de impacto, num padrão circular de raio crescente. As regiões da superfície da água por onde já passou a perturbação se acalmam. Se a superfície da água é atingida por uma seqüência de gotas, estas gerariam uma sucessão de ondas, cada qual afastando-se cada vez mais do ponto de impacto e seguida por outra com as mesmas características.

#### III.1. Diferença de Fase

Para discutir o conceito de diferença de fase, consideremos duas partículas, A e B, com movimentos circulares uniformes idênticos. Em  $t = 0$ , a partícula A ocupava a posição  $P_0$  (Fig.24). As partículas estão separadas por uma distância  $2\pi R/4$ , medida sobre a trajetória comum de raio R. Esta distância corresponde a um ângulo de  $\pi/2$  entre os segmentos de reta que unem as partículas ao centro da trajetória ou a um intervalo de tempo  $\pi/2\omega$ . Dizemos que entre os dois movimentos circulares uniformes das partículas A e B existe uma diferença de fase  $\Delta\theta = \pi/2$  radianos.

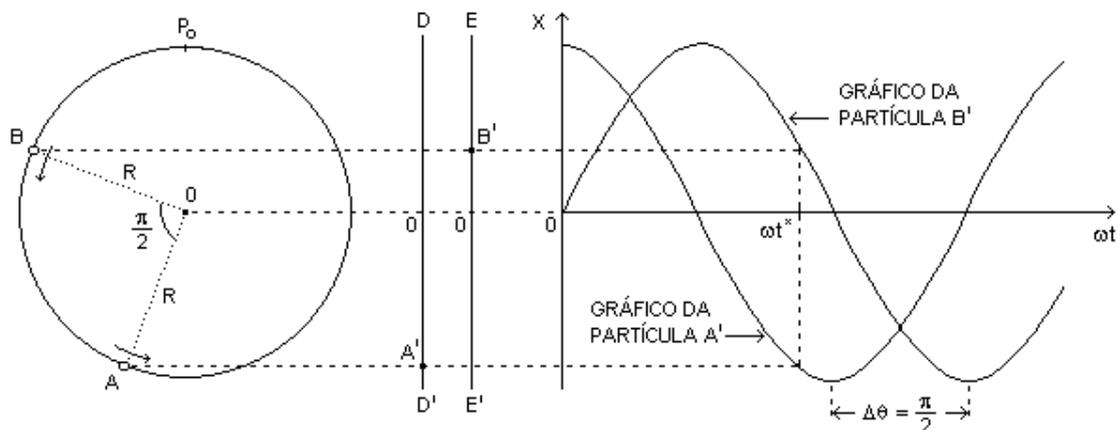


Fig.24

Por outro lado, o movimento harmônico simples pode ser visto como a projeção ortogonal do movimento circular uniforme sobre qualquer diâmetro (ou qualquer reta paralela a qualquer diâmetro) da circunferência que constitui a trajetória da partícula. Assim, os movimentos circulares uniformes das partículas A e B, projetados ortogonalmente sobre as retas verticais DD' e EE', respectivamente, constituem os movimentos harmônicos simples das partículas A' e B' (Fig.24). Observando os respectivos gráficos das elongações em função de  $\omega t$ , vemos que a diferença de fase entre os movimentos circulares uniformes e, agora, entre os movimentos harmônicos simples, aparece como um deslocamento de um gráfico em relação ao outro ao longo do eixo  $\omega t$ , deslocamento este dado por  $\Delta\theta = \pi/2$  radianos.

A equação horária de movimento para uma partícula em MHS é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

Aqui, o argumento  $(\omega t + \delta)$  é chamado fase, com  $\delta$  sendo a fase inicial já que dá a posição da partícula em  $t = 0$ . No exemplo discutido,  $\delta = 0$  para a partícula A' e  $\delta = -\pi/2$  para a partícula B', de modo que as respectivas equações horárias ficam:

$$x_A(t) = R \cos \omega t \quad \text{e} \quad x_B(t) = R \cos(\omega t - \pi/2)$$

Discutimos o conceito de diferença de fase considerando o exemplo de dois movimentos com uma diferença de fase de  $\pi/2$  radianos. De modo geral, os movimentos podem ter qualquer diferença de fase.

### Olas

Um fenômeno interessante de observar nos estádios de futebol é a chamada "ola". Os espectadores de uma linha se colocam de pé e sentam, sem sair do lugar, quando percebem que os espectadores da linha adjacente o fez. Entre o movimento de uma linha e o movimento da linha adjacente existe uma diferença de fase. O efeito coletivo é um pulso que se propaga pelos espectadores do estádio. Quando o pulso se propaga para a direita, por exemplo, os espectadores de uma linha fazem o movimento um pouco depois que os espectadores da linha adjacente à esquerda (Fig.25). Os espectadores de cada linha apenas se põem de pé e sentam, não se deslocando lateralmente: eles não vão junto com o pulso. Eles são, por assim dizer, o meio através do qual o pulso se propaga. Se os espectadores se colocam de pé e sentam continuamente, um trem de ondas se propaga pelos espectadores do estádio.

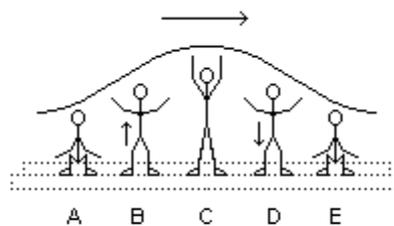


Fig.25

### As Ondas do Mar

Para discutir um pouco mais o fato de que a onda não transporta matéria consideremos uma onda do mar. Podemos ver que a água não vai junto com a onda observando uma bola que flutue sobre a água. A bola descreve uma circunferência (ou uma elipse) para cada intervalo de tempo que leva a onda que passa por ela para se propagar uma distância equivalente à distância entre duas cristas. Observando uma bola que inicialmente se encontra sobre uma crista (Fig.26(a)), vemos que ela se move para baixo e para a direita (Fig.26(b)), mais para baixo e para a esquerda (Fig.26(c)), para cima e para a esquerda (Fig.26(d)) e mais para cima e para a direita (Fig.26(e)), voltando a sua posição original exatamente junto

com a próxima crista. E assim, sucessivamente. Portanto, a medida que a onda passa, a bola sobe e desce e vai para a direita e para a esquerda, descrevendo círculos no espaço. No final das contas, a bola não abandona a pequena região onde se encontra.

Longe da praia, cada partícula de água se move numa trajetória circular ou elíptica num plano vertical. O movimento de cada partícula pode ser considerado como a superposição de dois movimentos harmônicos simples de mesma frequência, um na horizontal e outro na vertical. As oscilações das partículas não estão confinadas apenas à superfície, estendendo-se para o fundo com amplitude decrescente. As

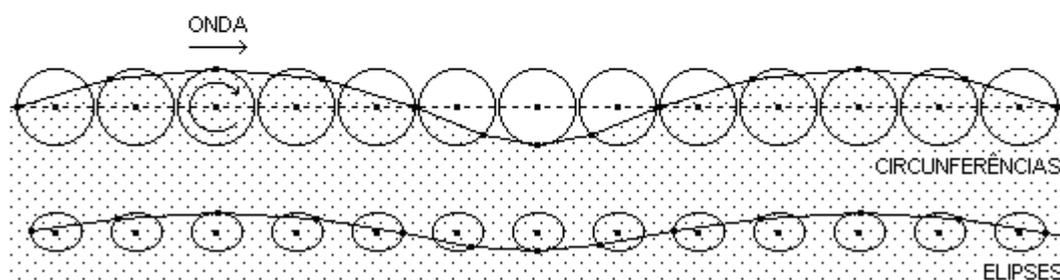
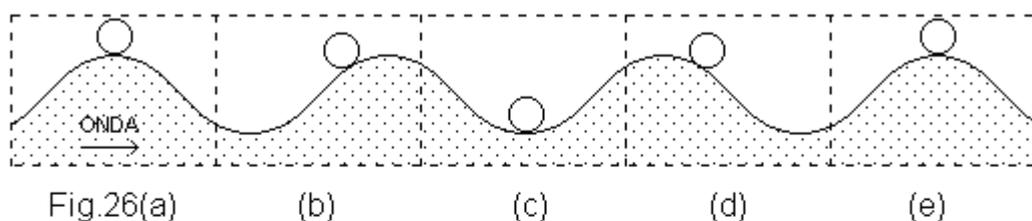


Fig.27

forças restauradoras resultam principalmente das diferenças de pressão originadas pelas variações de profundidade de ponto a ponto. O papel das forças de tensão superficial é secundário mas, a medida que a escala do fenômeno diminui, fica cada vez mais importante. A Fig.27 ilustra as trajetórias do movimento de partículas na camada superficial (circunferências) e noutra camada, abaixo da superfície (elipses). A linha horizontal tracejada representa a superfície livre do líquido em repouso. O sentido de propagação da onda depende do sentido em que as porções de água descrevem suas trajetórias circulares. A onda se propaga no mesmo sentido que a água na crista da onda. Quanto maior o comprimento de onda de uma onda na superfície da água, maior a velocidade com que se desloca. Pequenas ondulações se deslocam com pequenas velocidades enquanto que grandes ondas oceânicas se deslocam com grandes velocidades. Ondas gigantes, produzidas por terremotos e/ou erupções vulcânicas, chamadas tsunamis, têm comprimentos de onda muito grandes e viajam a velocidades que podem chegar a centenas de quilômetros por hora. E como movimentam grandes quantidades de água muito profundamente no oceano, os tsunamis levam enormes quantidades de energia.

Ao se aproximar da praia, a forma da onda do mar se modifica. As porções de água deixam de se mover em trajetórias circulares porque sua velocidade próximo ao fundo do mar é cada vez menor devido ao atrito com o leito do mar. Com isso, as porções no fundo vão se atrasando em relação às porções mais altas e quando o atraso é tal que as porções superiores não encontram mais sustentação nas inferiores, elas desabam e a onda se quebra.

Embora a água não se mova junto com a onda do mar, um surfista, com sua prancha, se move para a frente junto com a onda porque desliza sobre a superfície

inclinada da água como se fosse sobre a encosta de uma montanha. E como a superfície da água se levanta atrás dele a medida que ele desliza para a frente, ele, jamais alcançando o ventre da onda, progride até que esta se quebre próximo à praia.

### III.2. Ondas Mecânicas Unidimensionais

Onda mecânica é um distúrbio que se propaga através de um meio elástico. Não existe transporte de matéria e sim, de energia, pela onda<sup>3</sup>. Se cada ponto do meio elástico executa um MHS, a onda é dita harmônica.

#### Ondas Transversais

Se os pontos do meio pelo qual passa uma onda oscilam numa direção perpendicular à direção de propagação da onda, esta é chamada de onda transversal.

A Fig.28 representa as posições de onze pontos de um meio elástico em três instantes de tempo sucessivos:  $t$ ,  $t + \Delta t$  e  $t + 2\Delta t$ . Observe que o movimento de um ponto qualquer tem sempre uma diferença de fase negativa em relação ao movimento do ponto adjacente a sua direita e que é justamente isso que torna o movimento coletivo uma onda transversal que se propaga para a direita. Se a diferença de fase fosse positiva, a onda se propagaria na direção oposta.

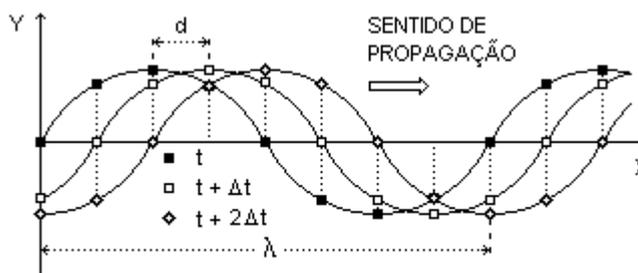


Fig.28

Se a diferença de fase fosse positiva, a onda se propagaria na direção oposta.

A onda gerada numa corda horizontal pelo movimento para cima e para baixo da mão que segura uma de suas extremidades é um exemplo de onda transversal. Outro exemplo de onda transversal, só que não mecânica, é a onda eletromagnética, na qual os campos elétrico e magnético oscilam perpendicularmente um ao outro e à direção de propagação da onda.

#### Polarização de uma Onda Transversal

A direção do movimento das partículas do meio quando por ele passa uma onda transversal é perpendicular à direção de propagação da onda. Mas existem infinitas direções que são perpendiculares à direção de propagação da onda. Caso as partículas do meio se movimentem sempre na mesma direção, ou seja, caso a onda permaneça sempre no mesmo plano, dizemos que ela é linearmente polarizada. Qualquer onda transversal pode ser considerada como combinação de duas ondas linearmente polarizadas em direções perpendiculares. Se os deslocamentos das partículas do meio têm todos o mesmo módulo, mas direções diferentes, de modo que a onda tenha forma helicoidal, dizemos que a onda é polarizada circularmente. Nesse caso, cada partícula do meio descreve uma circunferência em torno da reta que passa pelos pontos de equilíbrio das partículas do meio.

#### Ondas Longitudinais

<sup>3</sup> As ondas que estamos estudando, associadas ao transporte de energia de um ponto a outro do meio elástico, são chamadas ondas viajantes ou ondas progressivas. Em oposição a estas, existem as ondas estacionárias, que estudaremos mais adiante.

Se os pontos do meio pelo qual passa uma onda oscilam numa direção paralela à direção de propagação da onda, esta é chamada de onda longitudinal.

A Fig.29 representa, na horizontal, as posições de treze pontos de um meio elástico em onze instantes de tempo sucessivos:  $t_0 = t$ ,  $t_1 = t + \Delta t$ ,  $t_2 = t + 2\Delta t$ , ...  $t_{10} = t + 10\Delta t$ .

Os pontos de equilíbrio dos movimentos harmônicos das partículas do meio estão sobre as linhas verticais e as linhas curvas servem para explicitar esses movimentos. Observe, em particular, a segunda partícula do meio, que oscila ao redor do ponto de equilíbrio sobre a linha tracejada e cujas elongações estão representadas pelas flechas. Observe, também, que as distâncias relativas entre

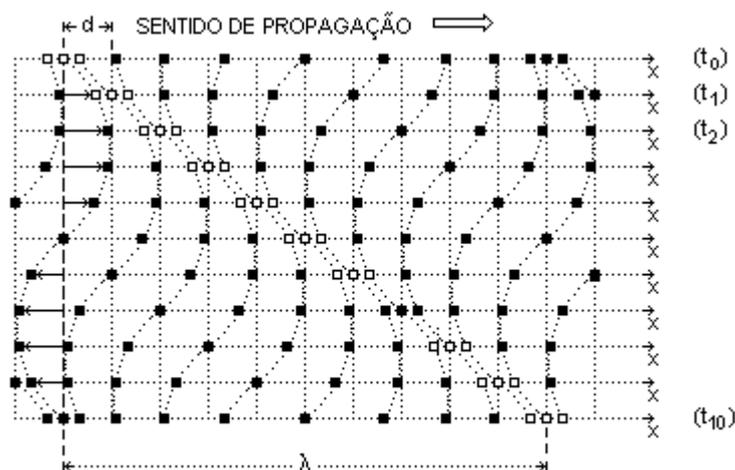


Fig.29

o primeiro, o segundo e o terceiro pontos no instante  $t$  são as mesmas que entre o segundo, o terceiro e o quarto pontos em  $t + \Delta t$ , e assim por diante, mostrando que a onda se propaga para a direita. O movimento de qualquer ponto tem sempre uma diferença de fase negativa em relação ao movimento do ponto adjacente a sua direita e é justamente isso que torna o movimento coletivo uma onda longitudinal que se propaga para a direita.

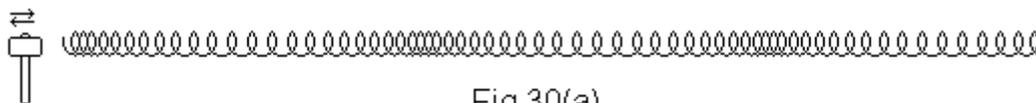


Fig.30(a)



(b)

A onda gerada numa mola, golpeando ritmicamente uma de suas extremidades na direção do seu eixo (Fig.30(a)), é uma onda longitudinal. Uma onda sonora no ar, gerada pelo movimento de vai e vem da membrana de um alto-falante (Fig.30(b)), e uma onda sonora em um sólido qualquer, gerada golpeando-se ritmicamente qualquer região do mesmo, são outros exemplos de ondas mecânicas longitudinais.

As ondas do mar (Fig.27) são, ao mesmo tempo, transversais e longitudinais. Cada partícula da água descreve um movimento circular ou elíptico que pode ser considerado como a superposição de dois movimentos harmônicos simples de mesma frequência, um na horizontal e outro na vertical. A onda pode, assim, ser considerada como a superposição de duas ondas, uma longitudinal e outra transversal, com uma diferença de fase de  $\pi/2$  rad, com amplitudes diferentes.

### III.3. Elementos de uma Onda

O padrão espacial que caracteriza a forma da onda se desloca para a direita, a medida que o tempo passa, com uma velocidade dada por  $v = d/\Delta t$  (Fig.28 e 29).

O período de oscilação de um ponto qualquer do meio, ou seja, o intervalo de tempo levado para realizar exatamente uma oscilação, é igual ao período da onda. A distância percorrida pela onda durante um dos seus períodos é o que se chama de comprimento de onda. Assim, representando por  $T$  o período e por  $\lambda$  o comprimento de onda, a velocidade de propagação da onda pode ser escrita:

$$v = \lambda / T$$

De modo análogo, a freqüência do MHS associado a cada ponto do meio elástico pelo qual se propaga a onda é, também, a freqüência da onda, ou seja, o número de comprimentos de onda contidos dentro da distância percorrida pela onda na unidade de tempo. Assim, representando por  $f$  a freqüência da onda, temos:

$$f = \omega / 2\pi = 1/T$$

e definindo o número de onda, representado por  $k$ , pela expressão  $k = 2\pi/\lambda$ , a velocidade de propagação da onda pode ser escrita:

$$v = \lambda f = \omega / k$$

A velocidade de propagação de uma onda é constante em um dado meio e é determinada apenas pelas propriedades físicas e pelo estado desse meio. Portanto, ondas mecânicas com freqüências ou comprimentos de onda diferentes se propagam, no mesmo meio, com velocidades iguais. Como  $v = \lambda f$ , uma onda com uma dada freqüência só pode ter um único comprimento de onda. Se a freqüência é grande, o comprimento de onda é pequeno e vice-versa. Isso possibilita caracterizar as ondas mecânicas em um meio tanto pela freqüência quanto pelo comprimento de onda.

Por outro lado, a freqüência é característica da fonte emissora da onda. Assim, ao passar de um meio para outro, a freqüência de uma onda não muda. Como  $f = v/\lambda$  e como a velocidade de propagação da onda muda quando essa passa de um meio para outro, já que é função das propriedades físicas e do estado do meio, muda também o comprimento de onda. Isso faz com que se possa caracterizar apenas pela freqüência uma onda que muda de meio.

### III.4. Transferência de Energia pela Onda

A energia total de um oscilador harmônico não amortecido é constante, de modo que a energia potencial diminui enquanto que a energia cinética aumenta e vice-versa. Numa onda progressiva as coisas acontecem de modo diverso. A propagação de uma onda progressiva está associada à transmissão de energia de um ponto oscilante do meio a outro e essa transmissão acontece porque os pontos que estão passando pela posição de equilíbrio têm tanto energia potencial quanto energia cinética máximas. Vamos discutir isso tomando como exemplo o caso de uma onda que se propaga em uma corda (Fig.31). A linha tracejada representa a posição dos pontos da corda em

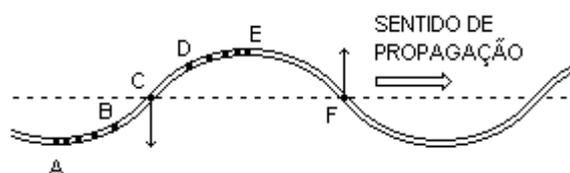


Fig.31

repouso e, também, as respectivas posições de equilíbrio. Os pontos mostrados indicam convencionalmente as posições relativas das partículas da corda quando passa a onda. Os pontos A e E estão momentaneamente parados e em sua vizinhança a corda não está deformada, isto é, os pontos da corda na vizinhança guardam as mesmas posições relativas que tinham antes de aparecer a onda. Para esses pontos, a energia cinética e a energia potencial associada à deformação elástica da corda são, ambas, nulas. Por outro lado, os pontos C e F, que estão passando pela posição de equilíbrio, têm velocidades máximas (indicadas pelas flechas) e em sua vizinhança a deformação (alongamento ou cisalhamento) é máxima. Para esses pontos, a energia cinética e a energia potencial são, ambas, máximas.

Mas, como os pontos C e F se movem, no instante seguinte são os pontos a sua direita que ocuparão posições sobre a linha tracejada, pontos esses que terão recebido energia para ter, agora, energias cinética e potencial máximas. O processo se repete com esses novos pontos e assim por diante. Portanto, a transmissão de energia na onda progressiva acontece com a mesma velocidade com que se propaga a fase das oscilações dos pontos do meio.

Quando uma onda se propaga em uma corda, esta sofre uma deformação por cisalhamento, e, em conseqüência, uma mudança de forma. As ondas transversais só podem se propagar em um meio se a mudança de forma desse meio vem acompanhada do aparecimento de forças restauradoras. Esse tipo de propriedade é própria apenas dos corpos sólidos e da superfície dos líquidos, de modo que só aí podem aparecer ondas transversais (mecânicas).

### III.5. Equação da Onda

Para estabelecer a equação da onda vamos tomar uma onda transversal que se propaga na direção do eixo X e no mesmo sentido desse eixo, com velocidade de módulo v (Fig.32). O padrão espacial da onda se desloca no espaço com o passar do tempo. Na figura, representamos a onda no instante de tempo considerado como inicial (t = 0) e num instante posterior genérico (t ≠ 0). Como estamos estudando ondas harmônicas, em qualquer instante de tempo, o padrão espacial da onda é dado por uma função harmônica (seno ou cosseno). Assim, para t = 0:

$$y(x, t = 0) = A \text{ sen} kx$$

onde A representa a amplitude da onda,  $\lambda$ , o comprimento de onda e  $k = 2\pi/\lambda$ , o número de onda. No argumento da função seno aparece a variável x multiplicada por k pela própria definição do seno como função

periódica (e da onda como fenômeno periódico no espaço). Por isso, devemos ter  $y(x + \lambda, t = 0) = y(x, t = 0)$  que, usando a expressão acima, fica  $A \text{ sen}(kx + k\lambda) = A \text{ sen} kx$ . Essa expressão é uma identidade trigonométrica porque  $k\lambda = 2\pi$ .

Tomando os pontos  $x'$  e  $x$  tal que  $x - x' = vt$ , ou seja, tal que  $x - x'$  representa a distância percorrida pela onda durante o intervalo de tempo t, temos:

$$y(x, t) = y(x', t = 0)$$

ou:

$$y(x, t) = y(x - vt, t = 0)$$

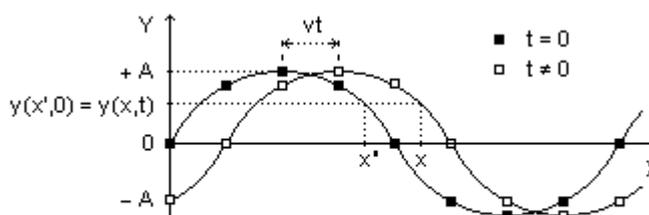


Fig.32

e usando a expressão acima para  $y(x,t = 0)$  com  $v = \omega/k$  vem:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Nesta equação está implícita a condição  $y = 0$  para  $x = 0$  e  $t = 0$ , o que não é necessário para uma onda arbitrária. A equação geral da onda que se propaga sobre o eixo X no mesmo sentido que aquele considerado positivo para esse eixo é:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \delta)$$

onde  $\delta$  é chamada fase inicial.

Fazendo  $v \rightarrow -v$  na demonstração acima obtemos a equação da onda que se propaga em sentido contrário àquele considerado positivo para o eixo X:

$$y(x,t) = A \sin(kx + \omega t + \delta)$$

Observe que tomando  $\delta = 0$  e  $x = \pi/k$  na primeira equação geral da onda obtemos  $y(\pi/k, t) = A \sin(\pi - \omega t)$ , e levando em conta que  $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ , temos que  $y(\pi/k, t) = A \sin \omega t$ . Esta é a equação de movimento de uma partícula em MHS com elongação nula em  $t = 0$ . Assim, a partícula do meio pelo qual passa a onda, na posição  $x = \pi/k$ , é um oscilador harmônico. O mesmo cálculo pode ser feito para outra posição, levando a conclusão de que a partícula correspondente tem, também ela, um MHS, mas com uma diferença de fase em relação ao MHS da primeira partícula. Isso já era de se esperar já que estamos considerando ondas harmônicas.

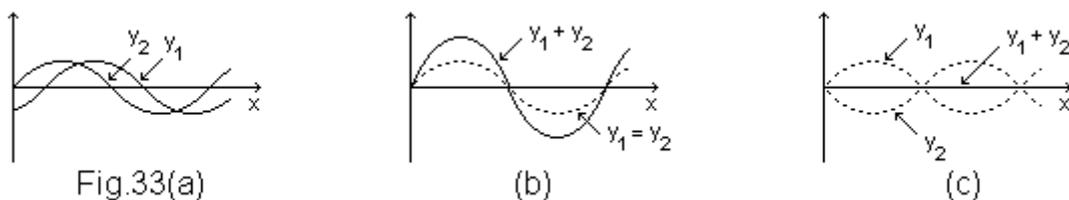
Embora a discussão acima tenha sido baseada nas ondas transversais por questões didáticas, as fórmulas obtidas valem também para as ondas longitudinais.

### III.6. Princípio de Superposição

Duas ou mais ondas podem se cruzar na mesma região do espaço, movendo-se independentemente. Então, o deslocamento de qualquer partícula do meio em um dado instante é a soma vetorial dos deslocamentos que seriam produzidos pelas ondas individualmente. Este constitui o princípio de superposição e ele só vale para ondas em meios elásticos, onde as forças de restauração são proporcionais às deformações. Inversamente, qualquer movimento ondulatório pode ser analisado como combinação de movimentos ondulatórios simples (harmônicos, por exemplo). Os efeitos físicos associados à superposição de duas ou mais ondas são chamados de interferência. Como exemplo, consideremos duas ondas de mesma direção e sentido, com freqüências, amplitudes e velocidades iguais, uma atrasada em relação a outra:

$$y_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t - \delta) \quad \text{e} \quad y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Em um instante de tempo qualquer ( $t$  fixo),  $y_1$  e  $y_2$  representam duas ondas separadas por uma distância  $\delta / k$  sobre o eixo X (Fig.33(a)).



fixo),  $y_1$  e  $y_2$  representam dois movimentos harmônicos simples defasados por um intervalo de tempo  $\delta / \omega$ . A onda resultante da superposição de  $y_1$  e  $y_2$  é dada por:

$$y_1 + y_2 = A[\text{sen}(kx - \omega t - \delta) + \text{sen}(kx - \omega t)]$$

e pela fórmula trigonométrica  $\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{sen}[\frac{1}{2}(A + B)] \cos[\frac{1}{2}(A - B)]$  temos:

$$y_1 + y_2 = [2A \cos \delta/2] \text{sen}(kx - \omega t - \delta/2)$$

A onda resultante tem a mesma freqüência angular  $\omega$  que  $y_1$  e  $y_2$ . Mas a amplitude, agora, é dada pelo fator  $2A \cos \delta / 2$ . Para  $\delta = 0$  temos  $y_1 = y_2$ , a amplitude da onda resultante vale  $2A$  (Fig.33(b)) e dizemos que existe interferência construtiva entre  $y_1$  e  $y_2$  (condição de máximo). Para  $\delta = \pi$  temos  $y_1 = -y_2$ , a amplitude da onda resultante vale zero (Fig.33(c)) e dizemos que existe interferência destrutiva entre  $y_1$  e  $y_2$  (condição de mínimo).

De modo geral, pode haver interferência entre ondas com quaisquer freqüências e/ou amplitudes e com qualquer diferença de fase.

### III.7. Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo

A velocidade de propagação  $v = \omega/k$ , de uma onda harmônica de comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/k$  e freqüência  $f = \omega/2\pi$ , é chamada velocidade de fase. Para discutir o que se entende por velocidade de grupo consideremos o exemplo da onda constituída pela superposição de duas ondas harmônicas de mesma amplitude  $A$ , mas de freqüências angulares  $\omega'$  e  $\omega$  quase iguais:

$$y(x,t) = A[\text{sen}(k'x - \omega't) + \text{sen}(kx - \omega t)]$$

que, pela fórmula trigonométrica mencionada acima, fica:

$$y(x,t) = 2A \cos \frac{1}{2}[(k'-k)x - (\omega' - \omega)t] \text{sen} \frac{1}{2}[(k'+k)x - (\omega' + \omega)t]$$

Como  $\omega'$  e  $\omega$  são quase iguais, podemos tomar  $\omega' + \omega = 2\omega$  e  $k' + k = 2k$  e daí:

$$y(x,t) = 2A \cos \frac{1}{2}[(k'-k)x - (\omega' - \omega)t] \text{sen}(kx - \omega t)$$

Esta expressão representa um movimento ondulatório dado por  $\text{sen}(kx - \omega t)$  (Fig.34(a), linha contínua) com amplitude modulada  $2A \cos \frac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t]$  (Fig.34(a), linha tracejada). O movimento ondulatório descrito por  $y(x,t)$  é como uma seqüência de pulsos.

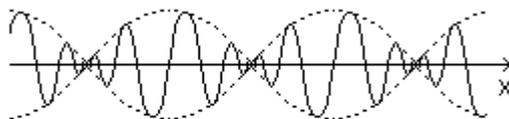


Fig.34(a)



(b)

A amplitude modulada corresponde a um movimento ondulatório que se propaga com a assim chamada velocidade de grupo:

$$v_G = (\omega' - \omega) / (k' - k)$$

Um único pulso (Fig.34(b)) pode ser construído superpondo-se um grande número de ondas harmônicas de comprimentos de onda e freqüências diferentes.

Se a velocidade de propagação for independente da freqüência, dizemos que o meio pelo qual se propagam as ondas é não dispersivo. Então, todas as ondas que compõem o pulso se deslocam com a mesma velocidade e a velocidade do pulso (velocidade de grupo) é a mesma que a velocidade de cada onda componente (velocidade de fase). Num meio dispersivo, cada onda que compõe o pulso se desloca com uma velocidade diferente e a velocidade do pulso não é igual à velocidade de fase, podendo ser maior ou menor que ela.

Uma onda harmônica que se estenda de  $-\infty$  a  $+\infty$  (trem de ondas) é caracterizada por um só comprimento de onda e uma só freqüência. Uma onda como essa não é adequada para transmitir informação porque informação implica alguma coisa que comece e termine. Uma onda apropriada para isso é um pulso e a informação pode ser codificada por uma seqüência de pulsos. Num meio não dispersivo, a informação viaja à velocidade de fase, que é idêntica à velocidade de grupo. Num meio dispersivo, a informação viaja à velocidade de grupo.

### III.8. Ondas Estacionárias

Consideremos uma corda ao longo do eixo X, com uma das extremidades fixa em  $x = 0$ , ao longo da qual se propaga uma onda transversal no sentido contrário àquele tomado como positivo para o eixo. Ao alcançar o ponto 0, a onda é refletida, propagando-se no sentido contrário (Fig.35). As ondas incidente e refletida são descritas, respectivamente, pelas expressões:

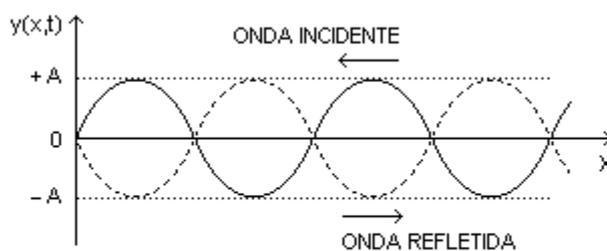


Fig.35

$$y_I(x,t) = A \sin(kx + \omega t) \quad \text{e} \quad y_R(x,t) = A' \sin(kx - \omega t)$$

O movimento de qualquer partícula da corda é o resultado da superposição das duas ondas:

$$y(x,t) = y_I(x,t) + y_R(x,t)$$

ou

$$y(x,t) = A \sin(kx + \omega t) + A' \sin(kx - \omega t)$$

Como a partícula da corda em  $x = 0$  permanece em repouso,  $y(0,t) = 0$  para qualquer  $t$ . Usando a propriedade  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ , temos que  $0 = A \sin \omega t - A' \sin \omega t = (A - A') \sin \omega t$  e daí,  $A = A'$ , ou seja, as ondas incidente e refletida têm a mesma amplitude e uma diferença de fase de  $\pi$  rad uma em relação à outra. E como  $\sin A - \sin B = 2 \sin [\frac{1}{2}(A - B)] \cos [\frac{1}{2}(A + B)]$ , temos:

$$y(x,t) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Como as fases  $(kx + \omega t)$  e  $(kx - \omega t)$  não aparecem em  $y(x,t)$ , a expressão acima não descreve uma onda viajante mas o que se chama de onda estacionária. Observe que todas as partículas da corda descrevem movimentos harmônicos simples de mesma frequência  $[y \sim \cos \omega t]$  e que a amplitude de cada movimento  $[2A \sin kx]$  depende da posição da partícula em questão.

A amplitude da onda estacionária é nula para  $kx = n\pi$  onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Como  $k = 2\pi/\lambda$ , podemos escrever:

$$x = n(\lambda/2)$$

Os pontos dados por essa expressão são chamados nós. Dois nós consecutivos estão separados por uma distância  $\lambda/2$ . O comprimento de onda  $\lambda$  é determinado pela frequência e pela velocidade de propagação, pela fórmula  $\lambda = v/f$ .

Se em  $x = L$  a corda tem a outra extremidade fixa,  $y(L,t) = 0$  para qualquer  $t$ . Então,  $0 = 2A \sin kL \cos \omega t$ , ou seja,  $\sin kL = 0$ ,  $kL = n'\pi$  onde  $n' = 1, 2, 3, \dots$  e:

$$\lambda = 2L/n'$$

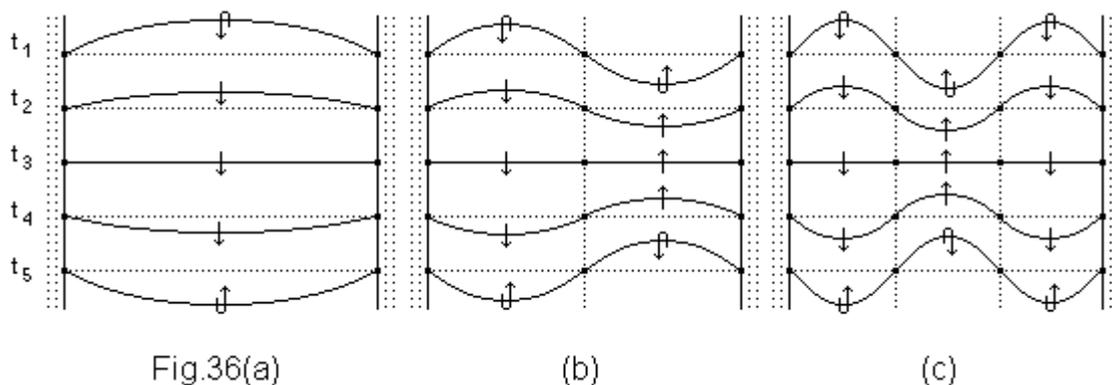
Essa expressão dá os comprimentos de onda das ondas estacionárias possíveis na corda. Correspondentemente, as frequências possíveis são dadas por:

$$f = n'(v/2L)$$

e as posições dos nós, por:

$$x = nL/n'$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots, n'$ . Na Fig.36(a, b e c), estão representadas as formas de uma corda com ondas estacionárias para  $n' = 1$  [ $\lambda = 2L$ , dois nós ( $n = 0$  e  $n = 1$ ), um em cada extremidade fixa],  $n' = 2$  [ $\lambda = L$ , três nós ( $n = 0, n = 1$  e  $n = 2$ )] e  $n' = 3$  [ $\lambda = 2L/3$ , quatro nós ( $n = 0, n = 1, n = 2$  e  $n = 3$ )], respectivamente, em cinco instantes de tempo sucessivos. As flechas indicam a direção instantânea do movimento da corda. Podem



existir ondas estacionárias com qualquer número de nós.

### Observações

Em uma onda harmônica progressiva, todas as partículas do meio executam movimentos harmônicos simples com a mesma amplitude. Em uma onda estacionária, as amplitudes dependem das posições das partículas.

As ondas que se movem em sentidos contrários (ao longo da corda, por exemplo) produzem ondas estacionárias mesmo se têm amplitudes diferentes.

Não pode haver fluxo de energia através dos nós. Assim, não pode haver fluxo de energia ao longo da corda quando sobre ela existe uma onda estacionária. Cada partícula do meio executa o seu particular MHS sem perder ou ganhar energia das partículas vizinhas.

A discussão acima foi baseada nas ondas transversais em uma corda por motivos didáticos. Ondas estacionárias podem aparecer tanto associadas a ondas transversais quanto a ondas longitudinais.

### III.9. A Cuba de Ondas

Um arranjo experimental interessante para se observar os fenômenos mais comuns característicos das ondas, quais sejam, a reflexão, a refração, a interferência e a difração, é o que se chama de cuba de ondas. O arranjo consiste no seguinte. Uma cuba rasa, transparente, com água a uma profundidade de 1 cm, com uma fonte de luz intensa iluminando o fundo da cuba, de baixo para cima, e um espelho, colocado sobre a cuba, de modo a refletir as sombras produzidas pelas perturbações na água numa tela fixa em uma parede vertical. A cuba com água pode ser colocada, por exemplo, em um retro-projetor.

Uma pequena esfera, mergulhada periodicamente na água, ou gotas pingadas com um conta-gotas, são fontes convenientes de ondas. Em baixas frequências, o comprimento de onda da onda produzida na água da cuba pode ter vários centímetros. Nessas condições, o módulo da velocidade de propagação da onda é dado pela expressão  $v \approx (gh)^{1/2}$ , onde  $g$  representa o módulo da aceleração gravitacional e  $h$ , a profundidade da água na cuba. Portanto, quanto mais rasa for a água, menor será a velocidade de propagação. Assim, uma régua, por exemplo, deitada sobre o fundo da cuba, junto a uma parede vertical, eliminará reflexões indesejadas nessa parede.

#### Frente de Onda e Raio

Consideremos as ondas bidimensionais produzidas na superfície da água de uma cuba de ondas por uma seqüência de gotas que caem no mesmo ponto (Fig.37). As circunferências (em perspectiva) representem as cristas das ondas, ou seja, os pontos do meio com elongação máxima relativamente à posição de equilíbrio. Todos esses pontos oscilam em fase. Os pontos sobre qualquer circunferência com centro no ponto de origem das ondas oscilam em fase. Quando as ondas se propagam não pela superfície, mas pelo interior do meio, o conjunto de pontos que oscilam com a mesma fase constituem uma superfície. Se o meio é isotrópico, de modo que o módulo da velocidade de propagação da onda é o mesmo qualquer que seja a direção de propagação, a superfície tem a forma esférica e a onda é chamada de onda esférica.

O lugar geométrico contínuo dos pontos do meio que oscilam em fase é chamado superfície ondulatória. A superfície ondulatória que vai mais adiante, ou seja, que está mais afastada da fonte das ondas, é chamada frente de onda.



Fig.37

Toda linha ao longo da qual se propaga a frente de onda se chama raio. Em um meio isotrópico, todo raio é uma linha reta perpendicular às superfícies ondulatórias. Toda reta que sai do ponto de origem das ondas e passa por qualquer ponto da frente de onda é um raio.

### III.10. Reflexão e Refração

A velocidade de propagação de uma onda depende das propriedades físicas do meio através do qual ela se propaga. Esse fato é a base dos fenômenos de reflexão e refração, que acontecem quando a onda alcança a superfície de separação de dois meios. A onda refletida é a onda que volta pelo mesmo meio onde se propagou a onda incidente. A onda refratada é a onda que se propaga pelo outro meio. A energia da onda incidente fica em parte na onda refletida e em parte na onda refratada. No caso da reflexão especular, a maior parte da energia fica na onda refletida.

O fenômeno de reflexão de ondas pode ser observado em uma cuba de ondas colocando-se uma régua com parte acima da superfície da água e deixando-se cair uma seqüência de gotas para produzir ondas sobre essa superfície (Fig.38). Seja O, o ponto onde as gotas atingem a superfície da água, originando as ondas, e O', o ponto simétrico a O em relação à superfície da régua onde as ondas se refletem. As ondas refletidas têm forma como se fossem emitidas de O'. Seja A um ponto qualquer sobre a superfície da régua e AD, um segmento perpendicular à superfície da régua em A. A linha OA é o raio incidente no ponto A e a linha AC, o correspondente raio refletido.

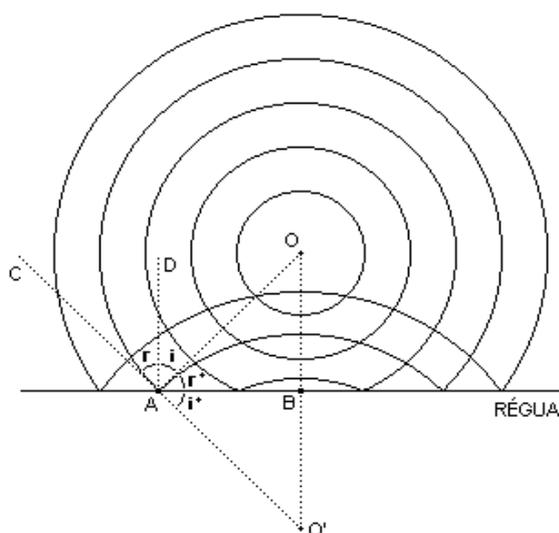


Fig.38

Seja  $i$  o ângulo de incidência,  $r$ , o ângulo de reflexão,  $i^*$ , o ângulo entre a régua e  $AO'$  e  $r^*$ , o ângulo entre a régua e  $AO$ . Como  $i + r^* = 90^\circ$  e como  $r^* = i^*$ , já que os pontos O e O' são simétricos, temos:

$$i + i^* = 90^\circ$$

e como  $r + i + r^* + i^* = 180^\circ$ , com  $i + r^* = 90^\circ$ , temos também:

$$r + i^* = 90^\circ$$

Comparando as duas expressões segue-se que  $i = r$ , ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

O fenômeno da refração de ondas, isto é, a mudança na velocidade de propagação das ondas quando da passagem de um meio para outro, pode ser observado em uma cuba de ondas colocando-se algum objeto como um pedaço de vidro plano sobre parte do fundo da cuba, reduzindo sobre ele a profundidade da água (região  $h_2$ ), e deixando-se cair uma seqüência de gotas em algum ponto da outra região (região  $h_1$ ), de modo a produzir ondas sobre a superfície da água (Fig.39(a)).

Assim, quando as ondas vindas da região  $h_1$  entram na região  $h_2$ , onde a água tem menor profundidade, a velocidade de propagação fica menor.

Seja  $O$  o ponto da região  $h_1$  onde as gotas atingem a superfície da água, originando as ondas,  $OAA'$ , um raio perpendicular à linha de separação entre as duas regiões consideradas e  $OBB'$ , um raio genérico. A refração não vem acompanhada, necessariamente, de mudança de direção, como se pode ver pelo raio  $OAA'$  considerado. Só existe mudança de direção se o raio incidente não é perpendicular à superfície de separação entre os dois meios considerados.

Durante o mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ , as ondas se deslocam uma distância como a de  $E$  para  $F$  na região  $h_1$  e de  $B$  para  $C$  na região  $h_2$ , e pode-se pensar que um ponto onde a onda passa de uma região para outra se desloca uma distância como a de  $B$  para  $F$ .

Seja  $DD'$  a reta perpendicular à linha de separação entre as regiões  $h_1$  e  $h_2$  no ponto  $B$  (Fig.39(b)). Seja  $i$  o ângulo de incidência e  $r$ , o ângulo de refração. Tomando  $\Delta t$  pequeno, podemos considerar  $BEF$  e  $BCF$  como triângulos retângulos, com hipotenusa comum  $BF$ . O ângulo em  $B$  no triângulo  $BEF$  é igual a  $i$  e o ângulo em  $F$  no triângulo  $BCF$  é igual a  $r$ . Então:

$$\text{sen } i = \lambda_1 / \overline{BF} \quad \text{e} \quad \text{sen } r = \lambda_2 / \overline{BF}$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os comprimentos de onda nas regiões  $h_1$  e  $h_2$ , respectivamente. Agora, a frequência das ondas não muda de uma região para outra, já que é característica da fonte, de modo que a relação  $f = v/\lambda$  permite escrever:

$$v_1 / \lambda_1 = v_2 / \lambda_2$$

Isolando  $\overline{BF}$  nas duas expressões acima e usando esta última, vem:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \text{constante}$$

O cociente  $v_1/v_2$ , simbolizado por  $n_{21}$ , é chamado índice de refração da região  $h_2$  em relação à região  $h_1$ . Assim:

$$n_{21} = \text{sen } i / \text{sen } r$$

### III.11. Princípio de Huygens

O princípio de Huygens é uma construção puramente geométrica que permite determinar a posição futura de uma frente de onda a partir de sua posição em

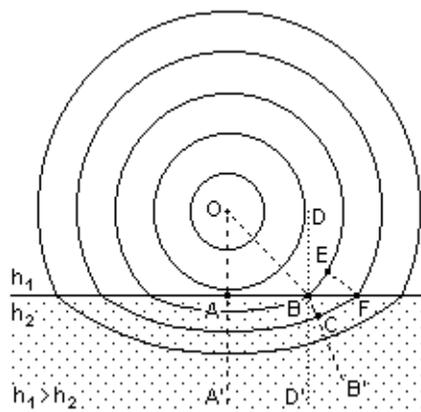
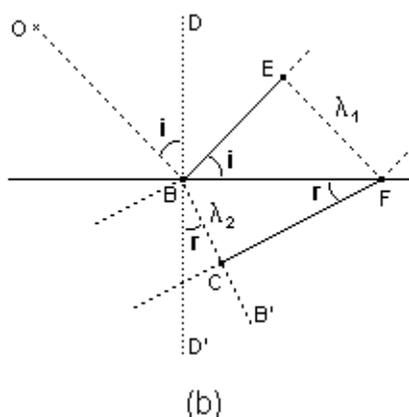


Fig.39(a)



(b)

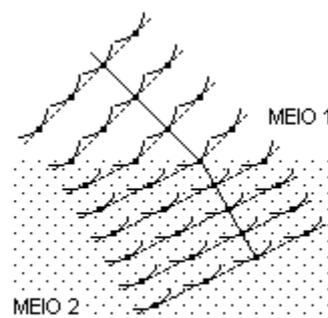


Fig.40

um instante dado. Todos os pontos de uma frente de onda são considerados como fontes de ondas esféricas secundárias. A nova frente de onda, em um instante de tempo posterior, é a envolvente dessas ondas secundárias como se apresentam nesse instante. A título de exemplo, a Fig.40 representa a refração de uma onda plana que passa do meio 1 para o meio 2, mostrando oito frentes de onda geradas segundo o princípio de Huygens e um raio, evidenciando a mudança de direção quando a incidência não é perpendicular à superfície de separação entre os meios. Em cada frente de onda foram representados apenas quatro pontos que atuam como fontes de ondas secundárias, de cada uma das quais apenas uma pequena parte aparece. Observe que a velocidade de propagação da onda fica menor quando ela entra no meio 2, de modo que o comprimento de onda nesse meio é menor que o comprimento de onda no meio 1.

O princípio de Huygens pode ter sentido como modelo físico para a propagação de uma onda elástica que resulta da vibração de átomos ou moléculas em um meio qualquer. Contudo, esse princípio não tem sentido como modelo físico em casos como o de uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo, por exemplo, onde não existem partículas que possam vibrar.

### III.12. Difração

Difração é o fenômeno pelo qual uma onda é distorcida por um obstáculo. Este obstáculo pode ser um pequeno objeto que bloqueia a passagem de uma parte da frente de onda ou uma fenda que permite a passagem de apenas uma parte da frente de ondas. A difração pode ser observada em uma cuba de ondas, por exemplo, obstruindo-se a passagem das ondas com duas lâminas metálicas separadas por uma abertura entre elas, e provocando ondas planas numa das regiões assim definidas. Quando a abertura tem dimensão muito maior que o comprimento de onda das ondas que se propagam na água da cuba, as ondas quase não se propagam atrás dos obstáculos (Fig.41(a)). Quando a abertura tem dimensão pequena, as ondas rodeiam visivelmente as bordas dos obstáculos (Fig.41(b)) e quando a abertura tem dimensão comparável ao comprimento de onda, as ondas rodeiam as bordas dos obstáculos de tal modo que, atrás deles, a superfície da água fica quase completamente perturbada pelas ondas (Fig.41(c)). Nesse caso, a abertura parece ser uma fonte independente de ondas que se propagam atrás dos obstáculos, em todas as direções.

As dimensões do objeto ou da abertura para as quais se observa a difração dependem do comprimento de onda: quanto menores tais dimensões frente ao comprimento de onda, tanto mais notável é a difração. Quando as dimensões do obstáculo ou da abertura são comensuráveis com o comprimento de onda, a difração se manifesta nas proximidades de tal obstáculo ou abertura (Fig.41(c)).

A difração pode ser compreendida pelo princípio de Huygens. Consideremos a frente de onda que chega a uma abertura, por exemplo. Todos os pontos dessa frente de onda se comportam como fontes de ondas secundárias. As ondas secundárias originadas nos pontos que se encontram frente aos anteparos que formam a abertura são bloqueadas por esses mesmos anteparos e a forma da frente de onda na região além da abertura fica determinada pelas ondas secundárias não bloqueadas.

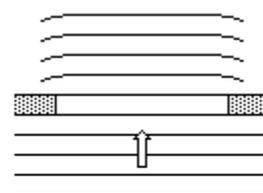
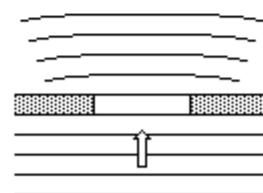
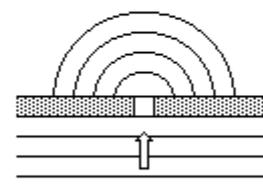


Fig.41(a)



(b)

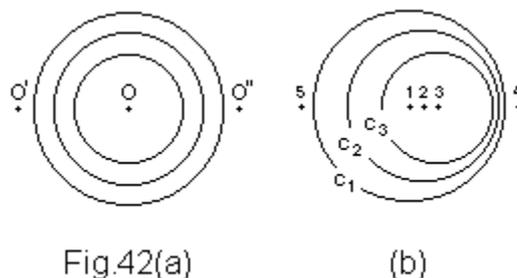


(c)

### III.13. Efeito Doppler

Caso alguns pulsos sejam emitidos com uma dada frequência, de uma fonte sonora, as correspondentes frentes de onda são superfícies esféricas (Fig.42(a) e (b), onde se representa as seções circulares planas dessas frentes de onda). Para um observador em  $O'$  ou em  $O''$ , por exemplo, em repouso em relação à fonte, as frentes de onda são concêntricas e igualmente espaçadas (Fig.42(a)), isto é, chegam até ele com a mesma frequência com que os pulsos são emitidos. Caso os pulsos sejam emitidos enquanto existe movimento relativo entre a fonte e o observador, as correspondentes frentes de onda deixam de ser concêntricas para o observador (Fig.42(b)). Nesta figura,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  representam as frentes de onda dos pulsos emitidos com a fonte nos pontos 1, 2 e 3, respectivamente. As frentes de onda chegam ao observador no ponto 4 com uma frequência maior e no ponto 5, com uma frequência menor do que aquela com que os pulsos foram emitidos. O que foi dito das frentes de onda vale igualmente para quaisquer superfícies de onda. Essa mudança na frequência devido ao movimento relativo entre a fonte e o observador é chamada efeito Doppler. O efeito Doppler acontece com qualquer movimento ondulatório e o espaçamento das frentes de onda, nesse efeito, está associado à velocidade relativa entre a fonte e o observador.

O efeito Doppler aparece, por exemplo, quando o som da sirene de uma ambulância parece mais agudo ao se aproximar e mais grave ao se afastar de nós, comparado àquele que escutamos com ela parada. Esse efeito aparece também quando se observa a luz de uma estrela. Se a estrela está se aproximando da Terra, seus raios luminosos são vistos com frequências maiores (desvio para o azul) e se a estrela está se afastando da Terra, seus raios luminosos são vistos com frequências menores (desvio para o vermelho). O aumento das frequências dos raios luminosos se chama deslocamento para o azul porque se dá na direção das frequências mais altas, correspondendo, no espectro, à cor azul, e a diminuição das frequências dos raios luminosos se chama deslocamento para o vermelho porque se dá na direção das frequências mais baixas, correspondendo, no espectro, à cor vermelha.



#### A Barreira do Som

Quando um objeto se move na atmosfera ele gera ondas esféricas longitudinais de pressão que se propagam com a velocidade das ondas sonoras. Em particular, as cristas das ondas geradas pelo objeto ficam tão mais próximas umas das outras à frente do objeto e tão mais afastadas atrás dele quanto maior for a velocidade do objeto em relação à atmosfera. Se a velocidade estiver próxima à velocidade das ondas sonoras, as cristas à frente se sobrepõem, formando uma crista única, de amplitude bem maior do que a amplitude de qualquer das ondas originais. Assim, à frente do objeto, a pressão atmosférica fica bem maior do que o seu valor normal. Quando o objeto se move à velocidade das ondas sonoras, a crista única passa a ter uma amplitude muito grande e recebe o nome de onda de choque. No caso de um avião, cada ponto de sua superfície externa se comporta como uma fonte de ondas de pressão e quando a velocidade do avião se aproxima da velocidade das ondas sonoras, começam a se formar ondas de choque sobre as asas e perto do nariz. Isso representa um grande obstáculo ao vôo já que aparecem problemas estruturais e de

pilotagem, além de uma grande resistência ao avanço do avião devido a grande pressão do ar a sua frente. Todas essas dificuldades constituem o que se costuma chamar de barreira do som.

Ao nível do mar e a 15 °C, a velocidade das ondas sonoras na atmosfera é de cerca de 344 m/s. A razão entre a velocidade de um objeto e a velocidade das ondas sonoras é o número de Mach ( $M$ ). Velocidades abaixo de Mach 1 ( $M < 1$ ) são chamadas subsônicas, acima de Mach 1 ( $M > 1$ ), supersônicas e maiores que Mach 5 ( $M > 5$ ), hipersônicas.

As dificuldades ao vôo de um avião apontadas acima ficam bastante reduzidas quando ele se desloca a velocidades maiores que cerca de 1,2 vezes a velocidade das ondas sonoras. Nessas velocidades, as ondas de choque aparecem destacadas do avião, um pouco a sua frente.